2011학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	2	④	3	②	4	⑤	5	①
6	②	7	④	8	④	9	①	10	③
11	②	12	①	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	②
21	①	22	15	23	27	24	130	25	140
26	3	27	10	28	12	29	17	30	7

해 설

1. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log_2 3+\log_2 \frac{8}{3}=\log_2\left(3\times\frac{8}{3}\right)=\log_2 2^3=3$

2. [출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

3. [출제의도] 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$

4. [출제의도] 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(\pi)-f(0)=-\cos\pi+\cos0=2$

5. [출제의도] 곡선의 접선의 기울기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=2$이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$

따라서 점 $(2,0)$에서의 접선의 기울기는 -6이다.

6. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X\ge830)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\ge0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.6)=0.5-0.2257=0.2743$

7. [출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

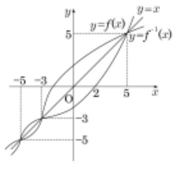
임의로 뽑은 한 명이 여학생일 사건을 F, 봄을 선택한 학생일 사건을 A라 하자.

$\mathrm{P}(A)=0.6\times0.55+0.4\times0.65=0.59$

$\mathrm{P}(F\cap A)=0.4\times0.65=0.26$ 이므로

$\mathrm{P}(F|A)=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{26}{59}$

8. [출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.



(i) $f(x)>0,\ f(x)\le f^{-1}(x)$에서 $2<x\le5$

(ii) $f(x)<0,\ f(x)\ge f^{-1}(x)$에서 $-5\le x\le-3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

9. [출제의도] 일차변환의 합성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 $f\circ g\circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$(f\circ g\circ f)(P)=f(P)$에서

$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\sqrt3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt3\\1\end{pmatrix}$이므로

$\cos\theta+\sqrt3\sin\theta=\sqrt3,\ -\sin\theta+\sqrt3\cos\theta=1$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=\frac{\sqrt3}{2}$이므로 $\tan\theta=\frac{\sqrt3}{3}$

10. [출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=ABA=BA^2$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A(AB)=(AB)A=E$이므로 $AAB=ABA$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

11. [출제의도] 좌표로 표시된 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.

$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

12. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a=-1,\ f(m)=-\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$a+f(9)=(-1)+(-45)=-46$

13. [출제의도] 공간좌표를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,3,2),\ \mathrm{B}(1,-3,-2),\ \mathrm{C}(1,3,-2)$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)\times\lim\limits_{x\to-1-0}g(x)=1\times0=0$이고

$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)\times\lim\limits_{x\to-1+0}g(x)=0\times(-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)-\lim\limits_{x\to1-0}g(x)=0-(-1)=1$이고

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)-\lim\limits_{x\to1+0}g(x)=1-0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=1$ (참)

ㄷ. $g(f(0))=g(-1)=0,\ \lim\limits_{x\to0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to-1+0}g(t)=-1$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

15. [출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(\beta-\alpha)(3^\alpha+3^{-\beta})=4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})$

$\ge4\times2\sqrt{3^\alpha\cdot3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2,\ \beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

16. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 점근선의 교점을 원점으로 하고, 두 초점이 x축 위에 있는 좌표평면에서 쌍곡선 H의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.

두 초점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,0),\ \mathrm{D}(-2,0)$이므로 $a^2+b^2=2^2$

직선 BE가 점근선이므로 $\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2a=2$

17. [출제의도] 함수의 그래프의 성질을 추측할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$이고 $f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}$이다.

ㄱ. $f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$에서 $e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$ (참)

ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f'(\alpha)=0$이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이자 최소이다. (참)

18. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.

이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.

한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1,2-t,t)$라 하면

$(t-1,2-t,t)\cdot(1,-1,1)=0$에서 $t=1$이다.

이때, $\mathrm{H}(0,1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt2$이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt2\pi$이다.

19. [출제의도] 적분과 미분을 이용하여 수면의 높이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

수면의 높이가 h일 때 물의 부피 V는

$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h(2^{y-1})^2dy$이므로

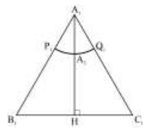
$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi(2^{2h-2})\frac{dh}{dt},\ \pi(2^{2a-2})\cdot6=12\pi$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 행렬을 나타낼 수 있는지 묻는 문제이다.

R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$성분과 같다.

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}=2$이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{\mathrm{A_1H}}=3\sqrt3$

$\overline{\mathrm{A_2H}}=\overline{\mathrm{A_1H}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3\sqrt3-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt3}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \dfrac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\,\pi$

22. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\sqrt{x+10} = x-10$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-6)(x-15)=0$

$\therefore\ x=15\ (\because\ x \ge 10)$

23. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = a_2 + (-a_3 + a_4) + (-a_5 + a_6)$

$= a + 3(a+1) = 4a + 3 = 15$에서 $a=3$

$\therefore\ a_7 = a + 6(a+1) = 7a + 6 = 27$

24. [출제의도] 중복조합을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_4\mathrm{H}_8 - {}_4\mathrm{H}_4 = {}_{11}\mathrm{C}_3 - {}_7\mathrm{C}_3 = 165 - 35 = 130$

25. [출제의도] 로그와 관련된 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$70 = 10\log \dfrac{\frac{1}{10^5}}{x_0} = 10(-5 - \log x_0)$ …… ㉠

$a = 10\log \dfrac{10^2}{x_0} = 10(2 - \log x_0)$ …… ㉡

㉡−㉠을 계산하면 $a - 70 = 70$

$\therefore\ a = 140$

26. [출제의도] 일차변환의 행렬을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ x+ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

에서 두 직선 $x'=2$, $y'=x'+1$로 각각 옮겨지는 두 직선 l, l'은 $-x+2y=2$, $x+ay=-x+2y+1$이다.

이때, 수직인 두 직선 l, l'의 기울기는 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{a-2}$이므로 $\frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{a-2} = -1$에서 $a=3$이다.

27. [출제의도] 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = t$라 하면 $-2 \le t \le 2$이다.

$(f \circ g)(x) = f(t) = t^3 - 3t^2 + 15$에서

$f'(t) = 3t(t-2)$이므로 $f(t)$는 $t=0$에서 극대이다.

따라서 $f(0)=15$, $f(-2)=-5$, $f(2)=11$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $f(0)+f(-2)= 10$이다.

28. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\int_0^a 2e^{-x}dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^a = 1$에서 $a = \ln 2$이다.

$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\ln 2} 2xe^{-x}dx = \left[-2xe^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} 2e^{-x}dx$

$= 1 - \ln 2$

$\therefore\ 10p + q = 12$

29. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고 $S_1 = S_2$이므로

$\int_0^1 \{-(x+1)^3 + 8 - k\}dx = 0$

$\therefore\ 4k = 4 \times \frac{17}{4} = 17$

30. [출제의도] 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=4$라 하면 $\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MP}}=\sqrt{3}$이고, 직각삼각형 BNP에서 $\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{13}$이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta = \left|\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2 - \overline{\mathrm{BP}}^2}{2\overline{\mathrm{BM}} \cdot \overline{\mathrm{MP}}}\right| = \dfrac{1}{6}$

$\therefore\ p+q = 6+1 = 7$