

2011학년도 11월 고1 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35

1. [출제외도] 무리식의 뜻을 알고 계산하기

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5+1} - (\sqrt{5}-1) = 2$$

2. [출제외도] 항등원 구하기

연산 \odot 에 대한 항등원을 e 라 하면
 $a \odot e = ae + 2(a+e+1) = a$,
 $ae + a + 2e + 2 = 0$,
 $a(e+1) + 2(e+1) = 0$
 이므로 $e = -1$

3. [출제외도] 이차방정식에서 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2 + 2ax - 3a = 0$ 이 중근을 가지므로
 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 에서
 $a^2 + 3a = 0$
 $\therefore a = 0$ 또는 $a = -3$
 따라서 $x^2 + 2ax - 3a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은 -3 이다.

4. [출제외도] 점과 직선 사이의 거리 구하기

점 $(\sqrt{3}, 1)$ 과 직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 사이의
 거리가 3이므로
 $\frac{|3-1+n|}{\sqrt{3+1}} = 3, |2+n| = 6$
 $\therefore n = -8$ 또는 $n = 4$
 따라서 양수 n 의 값은 4이다.

5. [출제외도] 합성함수와 역함수의 뜻을 알고 성질 이해하기

$(f \circ g^{-1})(1) = f(g^{-1}(1))$
 $= f(2) = 3$,
 $(g \circ f)^{-1}(4) = (f^{-1} \circ g^{-1})(4)$
 $= f^{-1}(g^{-1}(4))$
 $= f^{-1}(3) = 2$
 따라서
 $(f \circ g^{-1})(1) + (g \circ f)^{-1}(4) = 3 + 2 = 5$

6. [출제외도] 항등식 이해하기

등식 $(a+b+3)x + ab - 1 = 0$ 이
 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 $a+b = -3, ab = 1$
 이때, $a+b < 0, ab > 0$ 이므로
 $a < 0, b < 0$ 이고 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
 $= a + b - 2\sqrt{ab}$
 $= -3 - 2\sqrt{1}$
 $= -5$
 따라서 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ 의 값은 -5 이다.

7. [출제외도] 집합의 연산법칙을 알고 추론하기

$\neg, A - B^C = A \cap (B^C)^C = A \cap B$ (참)
 $\neg, (A - B) - C = (A \cap B^C) - C$
 $= A \cap B^C \cap C^C$
 $= A \cap (B \cup C)^C$
 $= A - (B \cup C)$ (참)
 $\neg, A \cap (B - A)^C = A \cap (B \cap A^C)^C$
 $= A \cap (B^C \cup A)$
 $= A$
 $(B - A) \cap A = (B \cap A^C) \cap A = \emptyset$ 이므로
 $\{A \cap (B - A)^C\} \cup \{(B - A) \cap A\} = A \cup \emptyset$
 $= A$ (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg, \neg 이다.

8. [출제외도] 이차방정식에서 근과 계수의 관계 이해하기

$x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$
 $x^2 + rx + p = 0$ 의 두 근이 $2\alpha, 2\beta$ 이므로
 근과 계수의 관계에 의하여
 $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = -r$,
 $(2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta = p$
 $\therefore q = \frac{p}{4}, r = 2p$
 따라서 $\frac{r}{q} = 8$

9. [출제외도] 이차부등식의 해 이해하기

x 에 대한 이차부등식
 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 오직 $x = 3$ 뿐이므로
 $a < 0, a(x-3)^2 \geq 0$ 가 되어야 한다.
 $ax^2 + bx + c = a(x-3)^2 = ax^2 - 6ax + 9a$
 $\therefore b = -6a, c = 9a$
 $bx^2 + cx + 6a = -6ax^2 + 9ax + 6a$
 $= -3a(2x^2 - 3x - 2)$
 $= -3a(2x+1)(x-2) < 0$
 $\therefore -\frac{1}{2} < x < 2$
 따라서 정수 x 는 0과 1뿐이므로 개수는 2이다.

10. [출제외도] 원과 직선의 위치관계 이해하기

접선이 점 $(-6, 0)$ 을 지나므로
 $0 = -6m + n, n = 6m$
 그러므로 접선의 방정식은 $y = mx + 6m$ 이다.
 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(0, 0)$ 에서
 접선 $y = mx + 6m$ 사이의 거리가
 반지름의 길이 3과 같으므로
 $\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$
 $36m^2 = 9(m^2+1), m^2 = \frac{1}{3}$
 $\therefore m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 $n = 6m$ 이므로
 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $n = 2\sqrt{3}$
 $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $n = -2\sqrt{3}$
 따라서 $mn = 2$

11. [출제외도] 선분의 외분을 이해하고 실생활 문제 해결하기

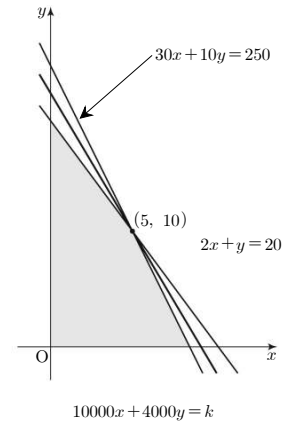
시청의 위치를 좌표평면 위의 원점이라 하면,
 헤미네 집의 좌표는 $A(-4, -2)$,
 학교의 좌표는 $B(0, 1)$, 도서관의 좌표는 (a, b) 이다.
 이때, 헤미네 집에서 도서관까지의 거리는
 학교에서 도서관까지의 거리의 3.5배이므로
 도서관의 좌표는 선분 AB 를 7:2로 외분하는 점이다.
 $(a, b) = \left(\frac{7 \times 0 - 2 \times (-4)}{7-2}, \frac{7 \times 1 - 2 \times (-2)}{7-2} \right)$
 $= \left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5} \right)$
 따라서 $a+b = \frac{19}{5}$

12. [출제외도] 역함수의 성질 이해하기

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2 (x \geq 2)$ 는
 $g(x) = x^2 - 4x + 6$ 의 역함수이므로
 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는
 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은
 두 함수 $y=g(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프의 교점이다.
 $x^2 - 4x + 6 = x, (x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
 따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 와 $(3, 3)$ 이므로
 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이다.

13. [출제외도] 부등식 영역을 활용하여 최대, 최소 문제 해결하기

목걸이와 팔찌의 개수가 각각 x, y 이므로
 $x \geq 0, y \geq 0, 30x + 10y \leq 250, 2x + y \leq 20$ 이다.
 연립부등식을 동시에 만족시키는 영역은
 그림의 어두운 부분이다.



이때, 판매 이익을 k 라고 하면
 $k = 10000x + 4000y$ 이고
 k 의 값은 두 직선 $3x + y = 25$ 와 $2x + y = 20$ 의 교점
 $(5, 10)$ 에서 최대이다.
 따라서 $x+y = 15$

14. [출제외도] 복소수의 뜻을 알고 기본 성질 이해하기

$z + \bar{z} = 0$ 을 만족시키는 복소수 $z (z \neq 0)$ 는
 순허수이므로
 $z = (i-2)x^2 - 3xi - 4i + 32$
 $= -2x^2 + 32 + (x^2 - 3x - 4)i$ 에서
 $-2x^2 + 32 = 0$ 이고 $x^2 - 3x - 4 \neq 0$ 이어야 한다.
 그러므로

$-2x^2+32=0$ 에서 $x=4$ 또는 $x=-4$
 $x^2-3x-4 \neq 0$ 에서 $x \neq 4$ 이고 $x \neq -1$
 따라서 $x=-4$

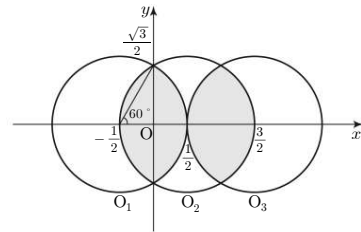
15. [출제의도] 나머지정리의 성질을 활용하여 추론하기

다항식 $f(x)$ 를 $(2x-3)(x+1)$ 로
 나눈 몫이 $Q(x)$ 이고 나머지가 $x+7$ 이므로
 $f(x) = (2x-3)(x+1)Q(x) + x+7$ 이다.

한편,
 $f(3x+1)$
 $= (6x-1)(3x+2)Q(3x+1) + \boxed{3x+8}$
 $= (3x+2)\{(6x-1)Q(3x+1)+1\} + \boxed{6}$
 이므로
 $f(3x+1)$ 을 $3x+2$ 로 나눈 나머지는 $\boxed{6}$ 이다.
 $P(x) = 3x+8$ 이고 $r=6$
 따라서 $r \times P(2) = 6 \times 14 = 84$

16. [출제의도] 평행이동을 활용하여 문제해결하기

원 O_1 의 방정식은 $(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$ 이다.
 원 O_1 을 y 축에 대하여 대칭이동한
 원 O_2 의 방정식은 $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$ 이고
 원 O_1 을 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한
 원 O_3 의 방정식은 $(x-\frac{3}{2})^2 + y^2 = 1$ 이다.
 그림과 같이
 원 O_1 의 내부와 원 O_2 의 내부의 공통부분의 넓이와
 원 O_2 의 내부와 원 O_3 의 내부의 공통부분의 넓이의
 합 S 는
 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 60° 인
 부채꼴의 넓이에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이고 높이가
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 직각삼각형의 넓이를 뺀 것의 8배이다.



따라서 $S = 8(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

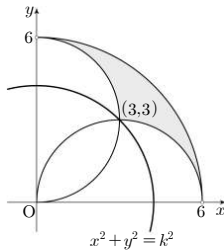
17. [출제의도] 필요조건과 충분조건 추론하기

ㄱ. $p \rightarrow q$ (참)
 $ab > 0$ 이면 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 이다.
 $a > 0, b > 0$ 이면 $|a+b| = a+b = |a|+|b|$ 이다.
 $a < 0, b < 0$ 이면 $|a+b| = -a-b = |a|+|b|$ 이다.
 $q \rightarrow p$ (거짓)
 (반례) $a=0$ 이고 $b=1$
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 ㄴ. $p \rightarrow q$ (참)
 $p \rightarrow q$ 의 대우 명제는 참이다. 즉,
 $a < 1$ 이고 $b < 1$ 이면 $a+b < 2$ 이다.
 $q \rightarrow p$ (거짓)
 (반례) $a=-3$ 이고 $b=2$

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 ㄷ. $p \rightarrow q$ (거짓)
 (반례) $a=0$ 이고 $b=1$
 $q \rightarrow p$ (참)
 $a^2+ab+b^2 = (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \leq 0$ 에서
 $a=b=0$ 이므로 $|a+b|=|a-b|$ 이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건
 따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ이다.

18. [출제의도] 부등식의 영역 이해하기

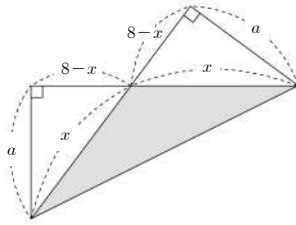
연립부등식을 만족시키는 점 (x, y) 를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



$x^2+y^2=k^2$ 이라 하면, k^2 는 주어진 부등식의 영역에서
 원 $x^2+y^2=k^2$ 이 점 $(3, 3)$ 을 지날 때 최소이다.
 따라서 x^2+y^2 의 최솟값은 18이다.

19. [출제의도] 삼각방정식 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라
 접었을 때, 겹치지 않은 두 직각삼각형은 합동이다.



이때, 두 직각삼각형의 빗변의 길이를 x 라 하면
 다른 두 변의 길이는 $8-x, a$ 이다.
 피타고라스의 정리에 의하여

$$x^2 = a^2 + (8-x)^2 \text{ 이므로 } x = \frac{a^2+64}{16}$$

한편, 겹쳐진 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}ax$ 이므로

$$\frac{1}{2}ax = 10,$$

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{a^2+64}{16} = 10,$$

$$a^3+64a-320 = (a-4)(a^2+4a+80) = 0$$

따라서 $a=4$

20. [출제의도] 무리함수의 그래프의 성질을 이해하여 추론하기

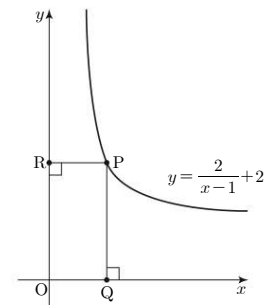
이차함수 $f(x) = ax^2+bx+c$ 의
 꼭짓점의 좌표가 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ 이므로
 $f(x) = a(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2}$

$y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로 $a=-2$

$f(x) = -2(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2} = -2x^2+2x+4$ 이므로
 $b=2, c=4$
 무리함수 $g(x) = -2\sqrt{x+2}+4$ 에 대하여
 ㄱ. 정의역은 $\{x|x \geq -2\}$ 이고 치역은 $\{y|y \leq 4\}$
 이다. (참)
 ㄴ. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 제3사분면을 지나지
 않는다. (거짓)
 ㄷ. 방정식 $f(x) = -2(x+1)(x-2) = 0$ 의 두 근이
 -1 또는 2 이므로 $\alpha=-1, \beta=2$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $g(x)$ 의 최댓값은
 $g(-1) = 2$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$x > 0$ 에서 정의된 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼
 평행이동한 함수 $y = \frac{2}{x-1} + 2$ 의 그래프는
 그림과 같다.



$y = \frac{2}{x-1} + 2$ 의 그래프 위의
 점 $P(t, \frac{2}{t-1} + 2)$ (단, $t > 1$)에 대하여
 직사각형 ROQP의 넓이 S 는 $S = t(\frac{2}{t-1} + 2)$ 이다.
 이때, 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여
 $S = (t-1+1)(\frac{2}{t-1} + 2) = 4+2(t-1) + \frac{2}{t-1}$
 $\geq 4+2\sqrt{2(t-1)(\frac{2}{t-1})} = 8$
 (단, 등호는 $t=2$ 일 때 성립한다.)
 따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 8이다.

22. [출제의도] 다항식의 곱셈 이해하기

$$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 64-12 = 52$$

23. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

(i) $x < -1$ 일 때, $-2x+1 < 5$ 에서
 $-2 < x < -1$
 (ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때, $x+1-x+2 < 5$ 가
 항상 성립하므로 $-1 \leq x < 2$
 (iii) $x \geq 2$ 일 때, $2x-1 < 5$ 에서 $2 \leq x < 3$
 (i), (ii), (iii)에 의하여
 부등식 $|x+1|+|x-2| < 5$ 의 해는 $-2 < x < 3$ 이다.
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 개수는 4이다.

24. [출제의도] 두 직선의 평행과 수직 이해하기

직선 $l: x-ay+2=0$ 과

직선 $m: 4x+by+2=0$ 이 수직이므로 $4-ab=0$
 $\therefore ab=4$
 직선 $l: x-ay+2=0$ 과
 직선 $n: x-(b-3)y-2=0$ 이 평행하므로
 $\frac{1}{1} = \frac{-a}{-b+3} = \frac{2}{-2}$
 $\therefore a-b=-3$
 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2 \times 4=17$
 따라서 $a^2+b^2=17$

25. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기

$x^2-2x+3 \leq -x^2+k$ 를 정리하면
 $2x^2-2x+3-k \leq 0$ 이므로
 $f(x)=2x^2-2x+3-k$ 라 하면
 $f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-k$ 이다.
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서
 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값을 갖고
 그 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로
 $f(-1)=-k+7 \leq 0$
 $\therefore k \geq 7$
 따라서 실수 k 의 최솟값은 7이다.

26. [출제의도] 연립이차부등식 문제해결하기

$\overline{QC}=a$ 이므로 $0 < a < 12$ 이고 $\overline{BQ}=12-a$
 이때, 세 $\triangle ABC, \triangle APR, \triangle PBQ$ 는 각각
 직각이등변삼각형이므로
 $\overline{AR}=\overline{PR}=a, \overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$ 이다.
 직사각형 PQCR의 넓이는 $a(12-a)$,
 $\triangle PBQ$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}(12-a)^2$,
 $\triangle APR$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$ 이므로
 주어진 조건에 의하여
 연립이차부등식

$$\begin{cases} a(12-a) > \frac{1}{2}(12-a)^2 \\ a(12-a) > \frac{1}{2}a^2 \end{cases}$$

 의 해를 구하면 $4 < a < 8$
 따라서 자연수 a 는 5, 6, 7이므로 합은 18이다.

27. [출제의도] 유리식의 뜻을 알고 실생활 문제해결하기

후보 A를 지지하는 남학생과 여학생의 수를
 각각 $2a, 3a$ 라 하고
 후보 B를 지지하는 남학생과 여학생의 수를
 각각 $4b, 3b$ 라 하자.
 후보 B를 지지하는 학생 수가
 후보 A를 지지하는 학생 수의 2배이므로
 $5a:7b=1:2$
 $\therefore a=\frac{7}{10}b$
 조사에 참여한 남학생과 여학생의 수의 비 $m:n$ 은
 $m:n=(2a+4b):(3a+3b)=\frac{54}{10}b:\frac{51}{10}b=18:17$
 이다.
 따라서 $m=18, n=17$ 이므로 $m+n=35$

28. [출제의도] 미지수가 3개인 연립일차방정식을 활용하여 실생활 문제해결하기

1교시에
 국어를 신청한 학생 수를 x ,
 수학을 신청한 학생 수를 y ,
 영어를 신청한 학생 수를 z 라 하면
 주어진 조건으로부터

$$\begin{cases} 0.5x+0.3y+0.4z=49 \\ 0.2x+0.5y+0.4z=47 \\ 0.3x+0.2y+0.2z=29 \end{cases}$$

연립방정식의 해를 구하면
 $x=40, y=50, z=35$
 따라서 1교시에 수학을 신청한 학생 수는 50이다.

29. [출제의도] 켈레복소수의 성질을 이용하여 삼차방정식의 해 구하기

조건 (가)에 의하여
 $2+i$ 가 삼차방정식 $P(x)=0$ 의 근이므로
 $2-i$ 도 $P(x)=0$ 의 근이다.
 삼차방정식 $P(x)=0$ 의 또 다른 근을 α 라 하면
 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$
 $= (x-2-i)(x-2+i)(x-\alpha)$
 $= (x^2-4x+5)(x-\alpha)$
 조건 (나)에 의하여
 $P(1)=2(1-\alpha)=1$ 이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이고
 $P(x)=(x^2-4x+5)(x-\frac{1}{2})$ 이다.
 $P(-1)=-15$ 이고
 $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$ 에서
 $P(-1)=-1-a-b-c=-15$
 따라서 $a+b+c=14$

30. [출제의도] 다항식의 최대공약수와 최소공배수 추론하기

두 다항식
 $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$,
 $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$
 의 최대공약수가 $(x-1)^2$ 이고 x^3-x^2-x+1 은
 x^2-1 과 $(x-1)^2$ 의 최소공배수이므로 조건 (나),
 (가)에 의하여 도형 A에는 $(x-1)^2$ 을 적을 수 있다.
 조건 (가)에 의하여 도형 B에 적을 식과 도형 A에
 적을 식 $(x-1)^2$ 의 최소공배수가 $(x-1)^2(x-2)$ 이므로
 도형 B에는
 $x-2$ 또는 $(x-1)(x-2)$ 또는 $(x-1)^2(x-2)$ 를
 적을 수 있다.
 (i) 도형 B에 $x-2$ 를 적으면 조건 (가)에 의하여
 도형 C에는 $(x-1)(x-2)$ 를 적을 수 있다.
 이때, 도형 B에 적은 $x-2$ 는 조건 (나)에 의하여
 $(x-1)^2(x-2)$ 와 $(x-1)(x-2)$ 의
 최대공약수 $(x-1)(x-2)$ 가 되어야 하므로
 모순이다.
 따라서 도형 B에 $x-2$ 를 적을 수는 없다.
 (ii) 도형 B에 $(x-1)(x-2)$ 를 적으면
 도형 C에는 $(x-1)(x-2)$ 를 적을 수 있다.
 (iii) 도형 B에 $(x-1)^2(x-2)$ 를 적으면
 도형 C에는 $(x-1)^2(x-2)$ 를 적을 수 있다.
 그러므로 도형 C에 적을 수 있는
 다항식은 $(x-1)(x-2)$ 와 $(x-1)^2(x-2)$ 뿐이다.
 이때, 합 $P(x)=(x-1)(x-2)+(x-1)^2(x-2)$
 $=x(x-1)(x-2)$
 따라서 $P(10)=720$