2012학년도 9월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설(1~3교시)

수학 영역

A형 정답

1	⑤	2	①	3	⑤	4	④	5	④
6	③	7	③	8	④	9	④	10	②
11	②	12	②	13	③	14	①	15	②
16	⑤	17	①	18	③	19	①	20	③
21	②	22	48	23	100	24	36	25	6
26	14	27	10	28	125	29	15	30	5

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=5$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\8&-1\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수방정식 계산하기

$(2^x-2)(2^x+2)=4$

$(2^x)^2=8$ 이므로 $2^{2x}=2^3$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

4. [출제의도] 지수법칙 이해하기

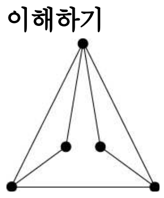
$2^x=\sqrt{2}+1,\ 2^{-x}=\sqrt{2}-1$ 이므로

$2^x+2^{-x}=2\sqrt{2}$ 이고 $2^x-2^{-x}=2$

$\frac{2^x-2^{-x}}{4^x+2+4^{-x}}=\frac{2^x-2^{-x}}{(2^x+2^{-x})^2}=\frac{2}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{4}$

5. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

$a=1,\ b=0,\ c=1$ 이므로 변의 개수는 모두 7개이다. 다섯 개의 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각 3, 2, 4, 2, 3



6. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

$x,\ y$에 대한 연립방정식

$\begin{pmatrix}1-k&2\\2&4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$의 해가 없으므로

행렬$\begin{pmatrix}1-k&2\\2&4-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

$(1-k)(4-k)-4=0,\ k=0$ 또는 $k=5$

(i) $k=0$

$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$의 해가 무수히 많다.

(ii) $k=5$

$\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$의 해가 없다.

따라서 $k=5$

$\begin{pmatrix}4&a\\a&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로 $a^2-16=0\ (a>0)$

$\therefore\ a=4$

7. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $A\in T_1$이므로 $A^2=E,$

$A^2=E$이면

$A^6=(A^2)^3=E$이므로 $A\in T_3$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$A^2\neq E$이므로 $A\not\in T_1$

$A^4=E$이므로 $A\in T_2$ (거짓)

ㄷ. $A\in T_2\cup T_3$이면 $A^4=E$ 또는 $A^6=E$

$\therefore A^{12}=E$ 즉, $A\in T_6$ (참)

8. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$3\le[\log_3 n]\le 4$ 에서

$3\le\log_3 n<5$ 이므로 $3^3\le n<3^5$

$\therefore$ 자연수 n의 개수는 216

9. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$(\log_4 x)^2-3\log_4 x-1=0$ 에서

$\log_4 x=t$라 하면 $t^2-3t-1=0$ …… ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log_4\alpha,\ \log_4\beta$이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$\log_4\alpha+\log_4\beta=3$ $\therefore\alpha\beta=4^3=64$

10. [출제의도] 로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$M_1=-2.81\times\log 50-1.43$

$M_2=-2.81\times\log 5-1.43$

$\therefore M_2-M_1=2.81$

11. [출제의도] 행렬을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+1$의 교점의 개수는 1개이므로 $a_{11}=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 개수는 2개이므로 $a_{12}=2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x+1$의 교점의 개수는 1개이므로 $a_{21}=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-2x+2$의 교점의 개수는 1개이므로 $a_{22}=1$

$\therefore$ 행렬 A의 모든 성분의 합은 5

12. [출제의도] 로그함수 이해하기

$a+b=c+d$은 $\frac{d-b}{c-a}=-1$이므로 점 P, Q는 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $a=d,\ b=c$이고 $0<a\le 1$이다.

$b+c=2c=2\sqrt{2}$

$c=\sqrt{2}$ 이므로 $d=\log_2\sqrt{2}$ 이다.

$\therefore d=\frac{1}{2}$

13. [출제의도] 그래프와 행렬을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

행렬 M^2의 $(i,\ i)$성분은 첫째 날 각 팀의 끝난 경기의 수이다.

(행렬 M^2의 모든 $(i,\ i)$성분의 합)

=(첫째 날 끝난 모든 경기의 수)×2

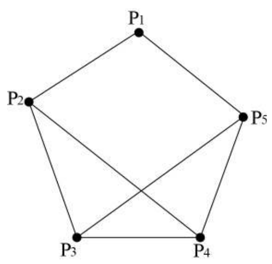
(첫째 날 끝난 모든 경기의 수)

$=\frac{(\text{행렬 } M^2 \text{의 모든 } (i,\ i)\text{성분의 합})}{2}$

$=\frac{2+3+3+3+3}{2}=7$

총 경기의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이므로 둘째 날 해야 할 경기의 경우의 수는 $10-7=3$이다.

(참고)



14. [출제의도] 지수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

기온이 20(℃)에서 포화수증기압은 K(hPa)이므로 $K=6.11\times 10^{\frac{7.5\times 20}{280+20}}$ …… ㉠

기온이 x(℃)에서 포화수증기압은 $\frac{K}{10}$(hPa)이므로 $\frac{K}{10}=6.11\times 10^{\frac{7.5x}{280+x}}$ …… ㉡

㉠ ÷ ㉡ 에서 $10=10^{\frac{150}{300}-\frac{7.5x}{280+x}}$

$\frac{150}{300}-\frac{7.5x}{280+x}=1$ $\therefore\ x=-17.5$

15. [출제의도] 역행렬을 이용하여 추론하기

<증명>

$A^2+A+E=O$에서 $A(A+E)=-E$이므로

$A^{-1}=\boxed{-1}(A+E)$

$B^{-1}=A+kE$이므로

$(A+kE)B=E=B(A+kE)$이다.

따라서 $AB=BA$

$(A^2B^2)^{-1}=(A^{-1})^2(B^{-1})^2=(A^{-1}B^{-1})^2$

$=\{(-A-E)(A+kE)\}^2$

$=\{kA+(\boxed{k-1})E\}^2$

$=(\boxed{k^2-2k})A+(1-2k)E$

$f(k)=k^2-2k,\ g(k)=k-1$이고 $p=-1$

$\therefore\ f(-1)\times g(-1)=-6$

16. [출제의도] 상용로그를 이용하여 추론하기

$x^2-\left(3n+\frac{1}{3n}\right)x+1=0$의 두 근은 $3n$과 $\frac{1}{3n}$이므로, $\log A^3$의 지표는 $3n$이고 $\log A^2$의 가수는 $\frac{1}{3n}$이다.

$\log A^3=3n+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$라 하자.

$\log A^2=2n+\frac{2}{3}\alpha$이고 $0\le\frac{2}{3}\alpha<\frac{2}{3}$ 이므로

$\log A^2$의 가수는 $\frac{2}{3}\alpha$이다.

$\frac{2}{3}\alpha=\frac{1}{3n}$ 이므로 $\alpha=\frac{1}{2n}$

$\log A=n+\frac{1}{6n}$

ㄱ. $n=1$일 때 $\log A^3$의 지표는 3 (참)

ㄴ. $\log A$의 가수는 $\frac{1}{6n}$ (참)

ㄷ. $\log A^{12}=12\log A=12n+\frac{2}{n}$이므로

$n=1$ 또는 $n=2$일 때 A^{12}은 자연수이다. (참)

17. [출제의도] 지수방정식 이해하기

방정식 $3^{2x}-k\cdot 3^{x+1}+3k+15=0$의 두 실근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하자.

$3^x=t\ (t>0)$라 하면

$t^2-3kt+3k+15=0$의 두 실근은 $3^\alpha,\ 3^{2\alpha}$

따라서 근과 계수와의 관계에 의해서

$\begin{cases}3^\alpha+3^{2\alpha}=3k & \cdots\cdots ㉠\\ 3^\alpha\cdot 3^{2\alpha}=3k+15 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠과 ㉡에 의하여

$(3^\alpha)^3=3^\alpha+(3^\alpha)^2+15$

$3^\alpha=s\ (s>0)$라 하면 $s^3-s^2-s-15=0$

$(s-3)(s^2+2s+5)=0$이므로 $s=3^\alpha=3$

$3k=3^\alpha+(3^\alpha)^2=3+3^2=12$ $\therefore k=4$

18. [출제의도] 로그부등식 이해하기

(가)에서 진수가 양수이므로 $y>x$ …… ㉠

$\log_2(y-x)<\log_2 1$ 이므로 $y<x+1$ …… ㉡

(나)에서 진수가 양수이므로

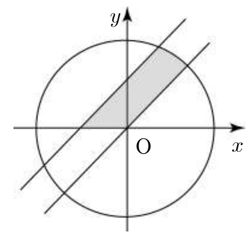
$-2<x<2$ 이고 $y>0$ …… ㉢

$\log_2 y<\log_4(4-x^2)$ 이므로

$2\log_2 y<\log_2(4-x^2)$

따라서 $x^2+y^2<4$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 모두 만족하는 영역을 어두운 부분으로 나타내면 다음과 같다.



19. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

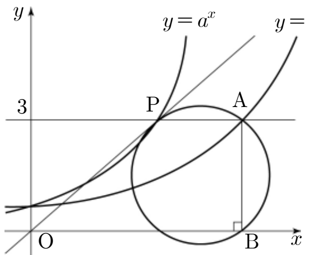
$2^x=X,\ 2^y=Y$라 하면 $X>0,\ Y>0$

$4^x+4^y=2$이므로 $X^2+Y^2=2$

$2^x+2^{y+1}=X+2Y$
$X+2Y=k$라 하면, 직선 $X+2Y-k=0$과 사분원 $X^2+Y^2=2$이 제 1사분면에서 접할 때, k가 최댓값을 갖는다.
$(0,\ 0)$에서 직선 $X+2Y-k=0$까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로 $\dfrac{|-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} \le \sqrt{2}$
$\therefore\ |k| \le \sqrt{10}$ 이므로 최댓값은 $\sqrt{10}$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기
ㄱ. $0<x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이므로
$2^{f(x_1)}<2^{f(x_2)}$ (참)
ㄴ. $x_1<x_2<0$이면 $f(x_1)>f(x_2)>1$이므로
$\log_2 f(x_1)>\log_2 f(x_2)$ (참)
ㄷ. (반례) $x_1=-2,\ x_2=3$이면
$\log_{\frac{1}{2}} f(-2)>\log_{\frac{1}{2}} f(3)$ (거짓)

21. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



점 A의 y좌표가 3이므로 x좌표는 10
A$(10,3)$
점 A에서 x축에 내린 수선의 발 B$(10,0)$
점 P는 $y=a^x$ 과 $y=3$의 교점이므로
P$(\log_a 3, 3)$
삼각형 BAP는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이고 선분 BP는 원의 지름이다.
직선 OP와 직선 BP는 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.
$\dfrac{3}{\log_a 3}\times\dfrac{3}{\log_a 3-10}=-1$
$(\log_a 3)^2-10\log_a 3+9=0$
$\log_a 3=1$ 또는 $\log_a 3=9$
$a=3$ 또는 $a=3^{\frac{1}{9}}$
$\therefore$ 모든 실수 a의 값의 곱은 $3^{\frac{10}{9}}$

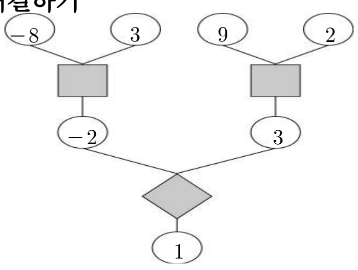
22. [출제의도] 로그함수 계산하기
함수 $y=\log_7(x+a)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$을 지나므로 $2=\log_7(1+a)$ $\therefore a=48$

23. [출제의도] 로그방정식 계산하기
$x^{\log x}=\left(\dfrac{x}{10}\right)^4$ 의 양변에 로그를 취하면
$(\log x)^2=4\log x-4$ 즉, $(\log x-2)^2=0$
$\log x=2$ $\therefore$ $x=100$

24. [출제의도] 로그방정식 이해하기
준식에서
$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=7\\ 2\log_2 x-\log_2 y=-1\end{cases}$$
연립하면 $\log_2 x=2$, $\log_2 y=5$
따라서 $x=\alpha=4,\ y=\beta=32$ $\therefore \alpha+\beta=36$

25. [출제의도] 지수부등식 이해하기
$f(x)=x^2-2^{a+1}x+9\cdot 2^a$라 하면
$f(x)\ge 0$이므로 방정식 $f(x)=0$에서
$D/4=(2^a)^2-9\cdot 2^a \le 0$
$2^a=t\ (t>0)$라 하면 $t^2-9t\le 0$
$0<t\le 9$ 이므로 $0<2^a\le 9$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3
$\therefore$ 모든 자연수 a의 값의 합은 6

26. [출제의도] 거듭제곱근을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\therefore x^2+y^2+z^2=(-2)^2+3^2+1^2=14$

27. [출제의도] 역행렬을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
집합 $X=\{a,b,c,d\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2\}$로의 함수 $f: X\to Y$의 개수는 $2\times2\times2\times2=16$
$\begin{pmatrix} f(a) & f(b)\\ f(c) & f(d)\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으려면
$f(a)f(d)=f(b)f(c)$
이를 만족하는 $(f(a),\ f(d),\ f(b),\ f(c))$는 다음과 같다.

$f(a)$	$f(d)$	$f(b)$	$f(c)$
1	1	1	1
1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	1	2
2	1	2	1
2	2	2	2

$\therefore$ 역행렬이 존재하는 함수의 개수는
$16-6=10$

28. [출제의도] 행렬을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}20 & 10\\ 30 & 20\end{pmatrix}$에 대하여
$AX=B$이므로 $X=\begin{pmatrix}10 & 0\\ -10 & 10\end{pmatrix}$
$(10,\ 0)$, $(-10,\ 10)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름은 $5\sqrt{5}$ $\therefore\ \dfrac{1}{\pi}S(X)=125$

29. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수 이해하기
$f(a)=n$이라 하자.
$6\{g(a)\}^2-5g(a)+1=0$
$\{3g(a)-1\}\{2g(a)-1\}=0$
$\therefore\ g(a)=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\dfrac{1}{2}$
(i) $g(a)=\dfrac{1}{3}$
$\log a=n+\dfrac{1}{3}$
$\log a^2=2\log a=2n+\dfrac{2}{3}$
$\log a^3=3\log a=3n+1$
따라서 $f(a)+f(a^2)+f(a^3)=6n+1$
그런데 $6n+1=14$를 만족하는 정수 n이 존재하지 않으므로 $g(a)$는 $\dfrac{1}{3}$이 아니다.
(ii) $g(a)=\dfrac{1}{2}$
$\log a=n+\dfrac{1}{2}$
$\log a^2=2\log a=2n+1$
$\log a^3=3\log a=3n+\dfrac{3}{2}$
따라서 $f(a)+f(a^2)+f(a^3)=6n+2$
$6n+2=14$를 만족하는 정수 n은 2이다.
따라서 $\log a=2+\dfrac{1}{2}$
$\log a^6=6\log a=6\times\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=15$
$\therefore\ f(a^6)=15$

30. [출제의도] 로그함수와 역함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$f(x)=2^{x-2}+1$는 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 역함수이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
함수 $f(x)$의 그래프와 x축과 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_2는 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=2$, $y=3$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
그러므로 S_1+2S_2는 네 개의 직선 x축, y축, $x=3$, $y=3$으로 둘러싸인 정사각형의 넓이와 네 개의 직선 x축, y축, $x=2$, $y=2$로 둘러싸인 정사각형의 넓이의 차와 같다.
$\therefore S_1+2S_2=9-4=5$