2012학년도 9월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설(1~3교시)

B형 정답

1	②	2	③	3	①	4	④	5	④
6	③	7	①	8	②	9	②	10	④
11	④	12	⑤	13	③	14	④	15	⑤
16	⑤	17	②	18	③	19	①	20	⑤
21	⑤	22	880	23	15	24	30	25	16
26	64	27	670	28	13	29	95	30	12

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt{2} \div \sqrt[5]{4\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{2}{5}+\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$BA - A^2 = (B-A)A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수방정식 계산하기

$(2^x)^2 - 12\cdot 2^x + 32 = 0$의 근을 α, β라 하면
근과 계수의 관계에서 $2^\alpha 2^\beta = 2^{\alpha+\beta} = 32$이다.
$\therefore\ \alpha + \beta = 5$

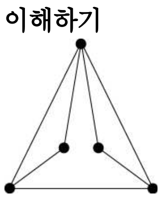
4. [출제의도] 등차수열 계산하기

첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_2 = a + d = -1$, $a_4 + a_6 + a_8 = 3a + 15d = 33$
에서 $a = -4$, $d = 3$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\{2\times(-4)+(10-1)\times 3\}}{2} = 95$

5. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

$a=1$, $b=0$, $c=1$이므로 변의 개수는 모두 7개이다. 다섯 개의 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각 3, 2, 4, 2, 3



6. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$2^x = 3^y = 5^z = k$라 하면

$2 = k^{\frac{1}{x}}$, $3 = k^{\frac{1}{y}}$, $5 = k^{\frac{1}{z}}$이다.

$2\times 3\times 5 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^{\frac{1}{2}}$

$k = (2\times 3\times 5)^2 = 900$

$\therefore\ 2^x + 3^y + 5^z = 3k = 2700$

7. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$10^5(1.004)^{24} + 10^5(1.004)^{23} + \cdots + 10^5(1.004)$

$= \frac{10^5(1.004)\{(1.004)^{24}-1\}}{1.004-1}$

$= \frac{10^5(1.004)(1.1-1)}{0.004}$

$= 251$만 원

8. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계 이해하기

모든 실수 t에 대하여 $t^2 - kt + 1 \neq 0$이므로
$D = k^2 - 4 = (k-2)(k+2) < 0$이다.
$\therefore\ -2 < k < 2$ ……㉠
$x=0$, $y=0$이외의 해를 갖기 위해서는
$k^2(k-1) - k(k+3) = 0$이다.
$k(k-3)(k+1) = 0$ $\therefore$ $k = -1,\ 0,\ 3$ ……㉡
㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 $k = -1,\ 0$이다.
$\therefore$ 모든 실수 k의 합은 -1

9. [출제의도] 지수부등식 이해하기

방정식 $x^2 - 2(3^a+1)x + 10(3^a+1) = 0$에서
$D/4 = (3^a+1)^2 - 10(3^a+1)$
$\quad = (3^a)^2 - 8\cdot 3^a - 9 = (3^a+1)(3^a-9) \le 0$
$-1 \le 3^a \le 9$이고, $3^a > 0$이므로 $0 < 3^a \le 3^2$
$a \le 2$ $\therefore$ a의 최댓값은 2

10. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$L_2 - L_1 = 0.46\log\frac{8K}{r} + 0.05$

$-\left(0.46\log\frac{K}{r} + 0.05\right)$

$= 0.46\times\log 8 = 0.46\times 0.9 = 0.414$

11. [출제의도] 등비수열 이해하기

$\log_{\frac{1}{2}} d = a$, $d = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ ……㉠

$2^c = d$ ……㉡

㉠과 ㉡에 의하여 $c = -a$ ……㉢

$\log_{\frac{1}{2}} b = c$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^c$ ……㉣

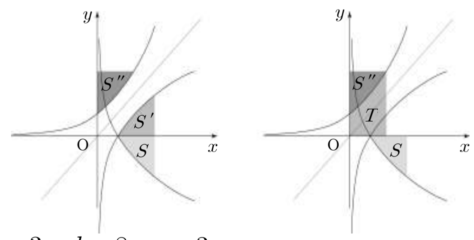
㉠과 ㉣에 의하여 $bd = \left(\frac{1}{2}\right)^{a+c} = 1$ ……㉤

$b, 2c, 5d$가 이 순서대로 등비수열이므로
$4c^2 = 5bd = 5$

㉢에 의하여 $a^2 = c^2 = \frac{5}{4}$ $(a<0)$

$\therefore a = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. [출제의도] 로그함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$a = -3$, $d = 8$, $c = 3$
두 곡선 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$와 $y = \log_2 x$는 x축 대칭이므로
$S = S'$
두 곡선 $y = \log_2 x$와 $y = 2^x$는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 $S' = S''$
$\therefore S + T = S'' + T = cd = 24$

13. [출제의도] 무한등비급수의 성질 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r \neq 0)$라 하면
ㄱ. $a_{101} = a_1 r^{100} < 0$ ($\because a_1 < 0,\ r^{100} > 0$) (참)
ㄴ. (반례) $a_n = 2^{n-3}$이면 $a_1 < a_2 < 1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다. (거짓)
ㄷ. $a_1 < a_1 r < 0$이다.

$a_1 < 0$이고 $0 < r < 1$이므로 $\frac{1}{1-r} > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < a_1$ 이다. (참)

14. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

상품 P의 개수를 x, 상품 Q의 개수를 y라 하면
판매한 상품의 총 판매이익금은 $5000x + 4500y$
이를 행렬로 표현하면

$(5000\ \ 4500)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

또한 상품 P, Q에 사용된 사탕과 초콜릿의 개수를 식으로 나타내면 $\begin{cases} 15x + 18y = 1260 \\ 16x + 12y = 1020 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 6y = 420 \\ 4x + 3y = 255 \end{cases}$ 이므로 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$

총 판매이익금을 행렬로 표현하면

$(5000\ \ 4500)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (5000\ \ 4500)\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$

$= (5000\ \ 4500)\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}(5000\ \ 4500)\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a = 4$

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

<증 명>
(1) $n = 1$일 때,

(좌변) $= \sum_{k=1}^{1} \frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k} = \boxed{\frac{5}{6}} =$ (우변)

이므로 (★)이 성립한다.
(2) $n = m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(m+1)3^m}$ 이다.

$n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}$

$= \sum_{k=1}^{m} \frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k} + \frac{\boxed{2m+5}}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{\boxed{3^{m+1}}}$

$= 1 - \frac{1}{(m+1)3^m} + \frac{2m+5}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{3^{m+1}}$

$= 1 - \frac{\boxed{3(m+2)}}{(m+1)(m+2)\boxed{3^{m+1}}}$

$\quad + \frac{2m+5}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{3^{m+1}}$

$= 1 - \frac{3m+6-2m-5}{(m+1)(m+2)3^{m+1}}$

$= 1 - \frac{1}{(m+2)3^{m+1}}$

그러므로 $n = m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$p = \frac{5}{6}$, $f(m) = \frac{2m+5}{3^{m+1}}$, $g(m) = \frac{3(m+2)}{3^{m+1}}$

$\therefore\ p\times f(1)\times g(1) = \frac{5}{6}\times\frac{7}{9}\times 1 = \frac{35}{54}$

16. [출제의도] 상용로그를 이용하여 추론하기

$x^2 - \left(3n + \frac{1}{3n}\right)x + 1 = 0$의 두 근은 $3n$과 $\frac{1}{3n}$
이므로, $\log A^3$의 지표는 $3n$이고 $\log A^2$의 가수는 $\frac{1}{3n}$이다.

$\log A^3 = 3n + \alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$라 하자.

$\log A^2 = 2n + \frac{2}{3}\alpha$이고 $0 \le \frac{2}{3}\alpha < \frac{2}{3}$ 이므로

$\log A^2$의 가수는 $\frac{2}{3}\alpha$이다.

$\frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{3n}$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2n}$

$\log A = n + \frac{1}{6n}$

ㄱ. $n=1$일 때 $\log A^3$의 지표 3 (참)

ㄴ. $\log A$의 가수는 $\frac{1}{6n}$ (참)

ㄷ. $\log A^{12} = 12\log A = 12n + \frac{2}{n}$이므로
$n = 1$ 또는 $n = 2$일 때 A^{12}은 자연수이다. (참)

17. [출제의도] 순서도를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

a, S의 값의 변화과정을 표로 나타내면

a	S
2012	0
2012	$0+2012$
201	$0+2012+201$
20	$0+2012+201+20$
2	$0+2012+201+20+2$
0	$0+2012+201+20+2+0$

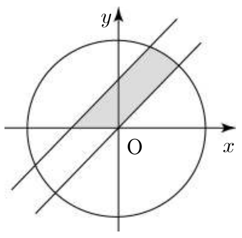
따라서 인쇄되는 S의 값은 2235

18. [출제의도] 로그부등식 이해하기

(가)에서 진수가 양수이므로 $y > x$ …… ㉠
$\log_2(y-x) < \log_2 1$ 이므로 $y < x+1$ …… ㉡
(나)에서 진수가 양수이므로
$-2 < x < 2$ 이고 $y > 0$ …… ㉢
$\log_2 y < \log_4(4-x^2)$ 이므로

정답 및 해설

$2\log_2 y < \log_2(4-x^2)$
따라서 $x^2+y^2<4$ …… ㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 모두 만족하는 영역을 어두운 부분으로 나타내면 다음과 같다.



19. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\mathrm{P}(a,\ 2^{-a+3}+4)$, $\mathrm{Q}(a,\ -2^{a-5}-3)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$이다.
$2^{-a+3}>0$, $2^{a-5}>0$ 이므로
산술·기하평균의 관계에 의해
$\overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}\ge 7+2\sqrt{2^{-a+3}2^{a-5}}$
$=7+2\sqrt{2^{-2}}=8$ (등호는 $a=4$일 때 성립)
따라서 선분 PQ 길이의 최솟값은 8이다.
선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.
$\therefore$ 정사각형 넓이의 최솟값은 32

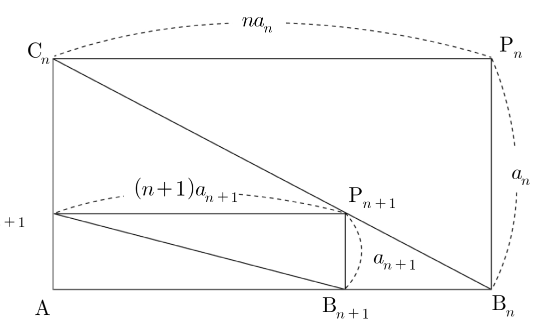
20. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로
$\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{3}{2}$이다. (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=A_{n+1}A_n\cdots A_2A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$=A_{n+1}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ (참)

ㄷ. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (n+1)a_n+b_n \\ (n+1)b_n \end{pmatrix}$
$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{(n+1)a_n+b_n}{(n+1)b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}+\dfrac{1}{n+1}$
$\dfrac{a_n}{b_n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$
$\therefore\ \dfrac{a_n}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ (참)

21. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\triangle \mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n \backsim \triangle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}_n}:\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{A}}=\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n}:\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}$
$na_n : a_n=\{na_n-(n+1)a_{n+1}\}:a_{n+1}$
$na_n=(2n+1)a_{n+1}$
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{2n+1}$ $\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$

22. [출제의도] 수열의 합 계산하기

$\sum_{k=1}^{10}2k(k+1)=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+2k)$
$=2\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k$
$=2\times\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+2\times\dfrac{10\cdot 11}{2}$
$=770+110=880$

23. [출제의도] 무한등비급수의 수렴조건 이해하기

공비가 $\dfrac{2x-5}{7}$이므로 주어진 무한등비급수가 수렴하기 위해서는 $-1<\dfrac{2x-5}{7}<1$ 이다.
$-7<2x-5<7$ 이므로 $-1<x<6$
$\therefore$ 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로 합은 15

24. [출제의도] 합의 기호를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a_n=32\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로
$\log_2 a_k=\log_2 32\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=6-k$
$\sum_{k=1}^{11}|\log a_k|=\sum_{k=1}^{11}|6-k|=30$

25. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 일반항 $a_n=2^n$ 이다.
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{3n+2}+a_8}{a_{3n-2}+a_2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n+2}+2^8}{2^{3n-2}+2^2}=2^4=16$

26. [출제의도] 행렬의 성질 이해하기

$A^2-A+E=O$ 이므로 $A^3=-E$
$B^2+2B=O$에서 $B^2=-2B$
$A^7B^7=(-2)^6AB=64AB$ $\therefore\ k=64$

27. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

블록을 n층으로 쌓았을 때, 전체블록의 수를 b_n, 한 면도 보이지 않는 블록의 수를 c_n이라고 하면
$b_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$c_1=c_2=0$, $c_3=1^2=b_1$, $c_4=1^2+2^2=b_2$
$c_5=1^2+2^2+3^2=b_3$ 이므로 $c_{n+2}=b_n$이다.
$a_n=b_n-c_n$ 이므로
$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(b_n-c_n)$
$=\sum_{n=1}^{10}b_n-\sum_{n=1}^{10}c_n=\sum_{n=1}^{10}b_n-\sum_{n=1}^{8}b_n$
$=b_9+b_{10}=285+385=670$

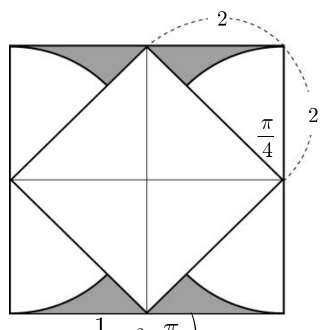
28. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$a_{n+1}a_{n+2}-2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_{n+1}}^2$ …… ㉠
$a_na_{n+1}-2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$ …… ㉡
㉠ − ㉡ 을 하면 $a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}={a_{n+1}}^2$
$a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)={a_{n+1}}^2$
$a_{n+2}-a_n=a_{n+1}$
$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$
$a_8=a_6+a_7=a_6+a_5+a_6$
$=2a_6+a_5=3a_5+2a_4$
이므로 $p=3$, $q=2$이다.
$\therefore\ p^2+q^2=13$

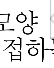
29. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 P_n에서 직선 AB에 내린 수선의 길이를 h_n이라 하면 $\triangle \mathrm{ABP}_n=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\times h_n=\dfrac{5}{2}h_n$이므로
a_n은 h_n에 의하여 결정된다.
l : 원의 중심과 직선 AB 사이의 거리
r_n : 원 C_n 의 반지름
$a_n=\dfrac{5}{2}\times h_n$의 최댓값 $-\dfrac{5}{2}\times h_n$의 최솟값
$=\dfrac{5}{2}(l+r_n)-\dfrac{5}{2}(l-r_n)=\dfrac{5}{2}\times 2r_n=\dfrac{10}{n}$
$\sum_{n=1}^{19}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{19}\dfrac{100}{n(n+1)}=100\left(1-\dfrac{1}{20}\right)=95$

30. [출제의도] 도형의 규칙성을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$S_1=4\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)=8-2\pi$

정사각형 모양 의 닮은 그림들을 크기순으로 나열할 때 인접하는 두 그림의 닮음비는
$4:2\sqrt{2}=2:\sqrt{2}$이고 넓이의 비는 $2:1$이다.
$S_2=S_1+(8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2}=(8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2}$
$S_3=S_2+(8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$=(8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2}+(8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$S_n=(8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\dfrac{1}{2}+\cdots+(8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(8-2\pi)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$=\dfrac{8-2\pi}{1-\dfrac{1}{2}}=16-4\pi$
$\therefore\ p+q=16-4=12$