

제 2 교시

수학 영역 (B형)

성명		수험 번호					2			
----	--	-------	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('A'형/'B'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt{2} \div \sqrt[5]{4\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

2. 두 행렬 A, B 에 대하여

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B - A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, $BA - A^2$ 은? [2점]

- ① $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. 지수방정식 $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값은? [2점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 + a_8 = 33$ 일 때,

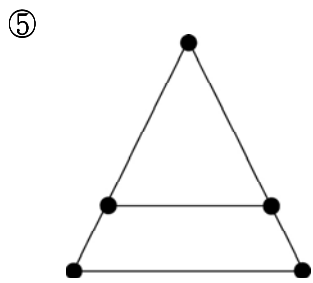
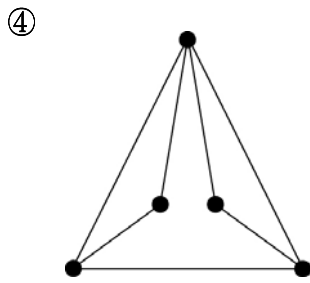
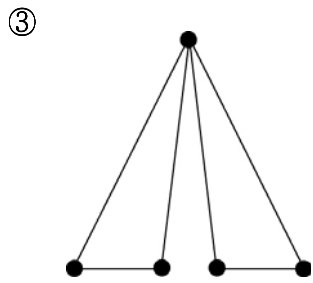
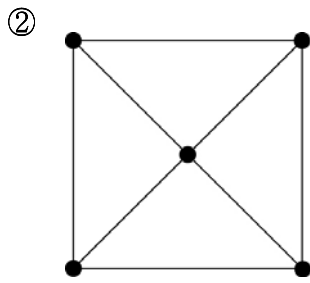
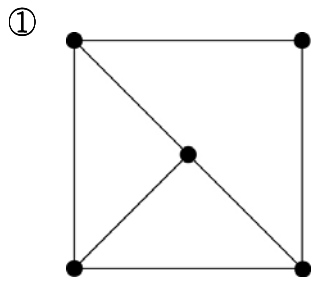
$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

- ① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

5. 꼭짓점의 개수가 5인 그래프 G 의 두 꼭짓점을 잇는 변의 개수를 행렬의 성분으로 하는 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬이 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이때, 그래프 G 로 가능한 것은? [3점]



6. 세 실수 x, y, z 가 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ 과 $2^x = 3^y = 5^z$ 을 만족시킬 때, $2^x + 3^y + 5^z$ 의 값은? [3점]

- ① 2100 ② 2400 ③ 2700 ④ 3000 ⑤ 3300

7. 2012년 9월 초부터 월이율 0.4%, 1개월마다의 복리로 매월 초에 10만 원씩 24개월 동안 은행에 적립할 때, 2014년 8월 말의 원리합계는? (단, $1.004^{24} = 1.1$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 251만 원 ② 256만 원 ③ 261만 원
④ 266만 원 ⑤ 271만 원

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합은? [3점]

(가) 모든 실수 t 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} t-k & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재한다.

(나) x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} k^2 & k+3 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖는다.

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9. 이차부등식 $x^2 - 2(3^a + 1)x + 10(3^a + 1) \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

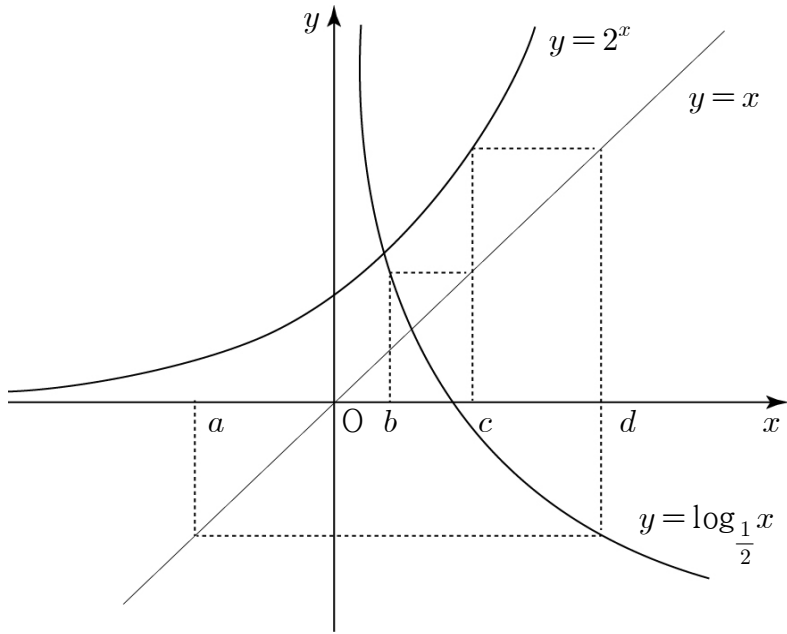
10. 평행한 두 전선에 교류 전류가 흐르면 각 전선에 전류의 흐름을 방해하는 기전력이 발생하고, 이 기전력의 크기를 결정하는 값을 인덕턴스라고 한다. 평행한 두 전선 사이의 거리가 $D(m)$, 평행한 두 전선의 반지름이 모두 $r(m)$ 일 때, 인덕턴스 $L(\mu H/m)$ 는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$L = 0.46 \log \frac{D}{r} + 0.05$$

평행하고 반지름이 같은 두 전선 사이의 거리가 $K(m)$ 일 때의 인덕턴스는 L_1 이고, 이 두 전선 사이의 거리가 $8K(m)$ 일 때의 인덕턴스는 L_2 이다. 이때, $L_2 - L_1$ 의 값은? (단, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 0.114 ② 0.214 ③ 0.314 ④ 0.414 ⑤ 0.514

[11~12] 그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=x$ 의 그래프와 $a < 0 < b < c < d$ 인 네 실수 a, b, c, d 의 관계를 나타낸 것이다. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오. (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



11. 세 수 $b, 2c, 5d$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
[3점]

- ① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ -1
- ④ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, x 축, 그리고 직선 $x=d$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S 라 하고 곡선 $y=2^x$, x 축, y 축, 그리고 직선 $x=c$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 T 라 하자. $a = -3$ 일 때, $S+T$ 의 값은? [3점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

13. 모든 항이 실수이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_1 < 0$ 이면 $a_{101} < 0$ 이다.

ㄴ. $a_1 < a_2 < 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

ㄷ. $a_1 < a_2 < 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < a_1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 어느 상점에서 표와 같이 사탕과 초콜릿이 들어 있는 두 종류의 상품 P, Q를 만들었다. 상품 P, Q의 개당 판매이익금은 각각 5000원, 4500원이다.

	사탕	초콜릿
상품 P	15개	16개
상품 Q	18개	12개

사탕 1260개와 초콜릿 1020개를 모두 이용하여 상품 P, Q를 만든 후, 이를 모두 팔았을 때의 총 판매이익금을 행렬

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5000 & 4500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & a+2 \\ a & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 255 \end{pmatrix}$$

로 표현할 때, 상수 a의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)3^n} \dots\dots (\star)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 1$ 일 때,
 (좌변) $= \sum_{k=1}^1 \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = \boxed{\text{(가)}} = \text{(우변)}$
 이므로 (\star) 이 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때, (\star) 이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^m \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(m+1)3^m}$ 이다.
 $n = m+1$ 일 때, (\star) 이 성립함을 보이자.
 $\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k}$
 $= \sum_{k=1}^m \frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \boxed{\text{(나)}}$
 $= 1 - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \boxed{\text{(다)}} + \frac{2m+5}{(m+1)(m+2)3^{m+1}}$
 $= 1 - \frac{1}{(m+2)3^{m+1}}$
 그러므로 $n = m+1$ 일 때도 (\star) 이 성립한다.
 따라서 모든 자연수 n에 대하여 (\star) 이 성립한다.

위 증명에서 (가)에 알맞은 값을 p라 하고 (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $p \times f(1) \times g(1)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{23}{54}$ ② $\frac{13}{27}$ ③ $\frac{29}{54}$ ④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{35}{54}$

16. 자연수 n 과 양수 A 에 대하여

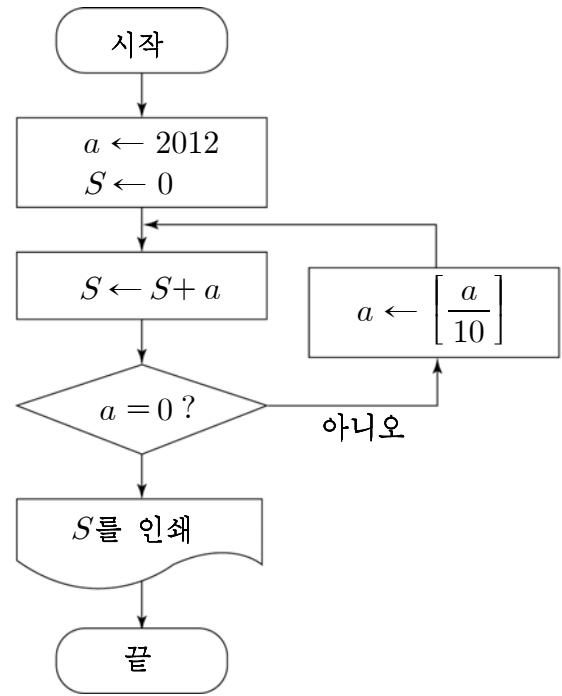
이차방정식 $x^2 - \left(3n + \frac{1}{3n}\right)x + 1 = 0$ 의 한 근은 $\log A^3$ 의 지표이고, 다른 한 근은 $\log A^2$ 의 가수이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $n = 1$ 이면 $\log A^3$ 의 지표는 3 이다.
 ㄴ. $\log A$ 의 가수는 $\frac{1}{6n}$ 이다.
 ㄷ. A^{12} 이 자연수가 되도록 하는 n 의 개수는 2 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 다음 순서도에서 인쇄되는 S 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

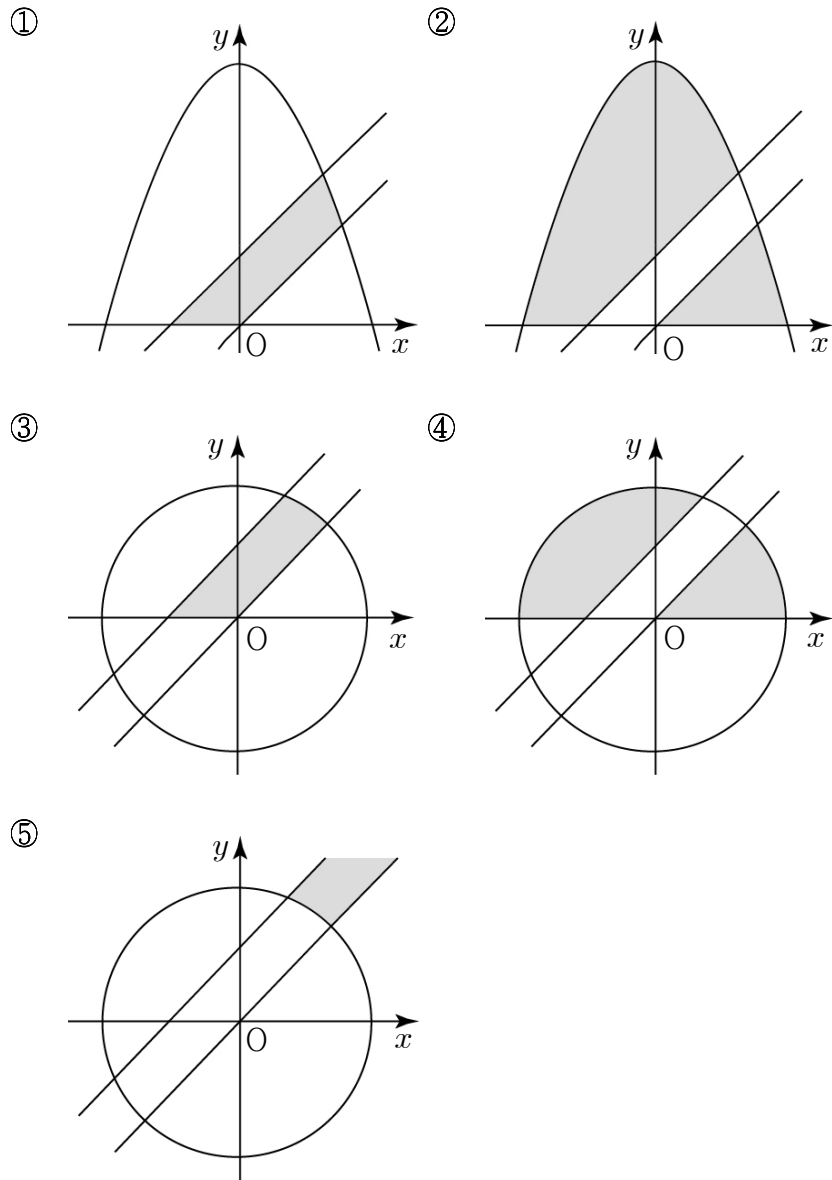


- ① 2230 ② 2235 ③ 2240 ④ 2245 ⑤ 2250

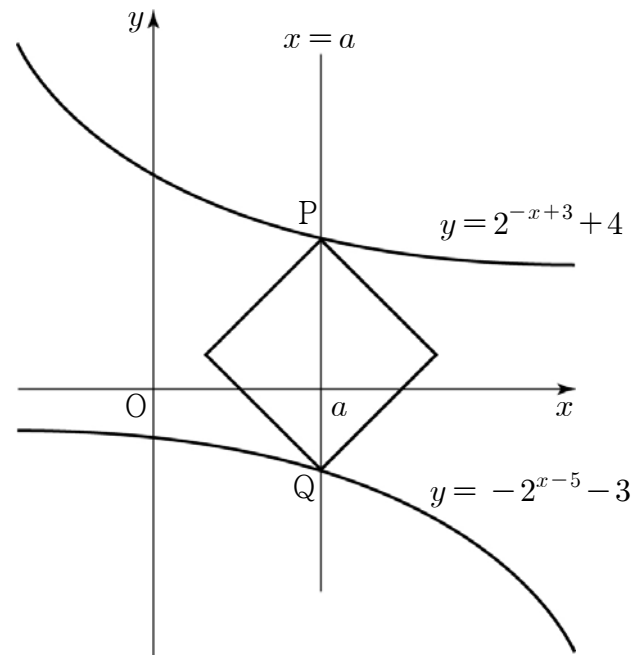
18. 두 실수 x, y 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2(y-x) < 0$
 (나) $\log_2 y < \log_4(4-x^2)$

이때, 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 나타낸 것은? (단, 경계선은 제외한다.) [4점]



19. 직선 $x=a$ 와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4, y=-2^{x-5}-3$ 의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



- ① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

20. 자연수 n 에 대하여

$A_n = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ 이고 $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\frac{a_2}{b_2} = \frac{3}{2}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A_{n+1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

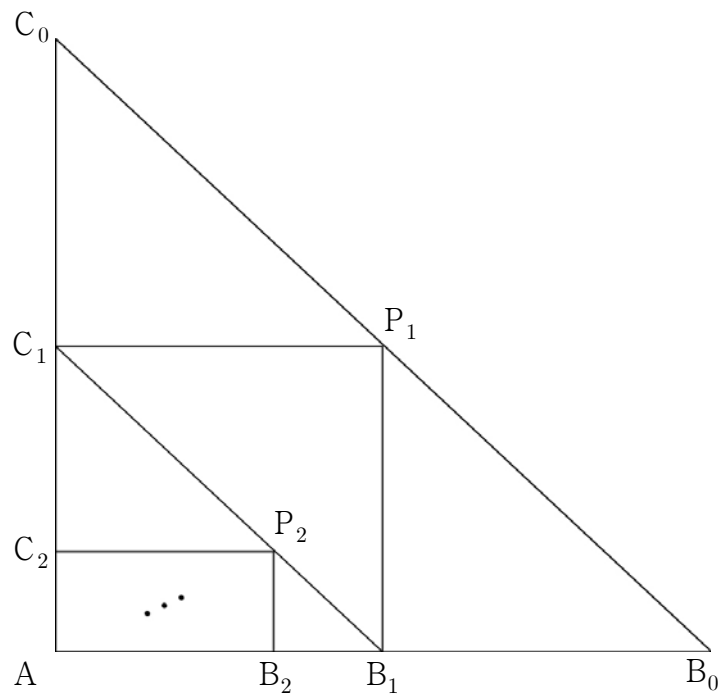
ㄷ. $\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 AB_0C_0 이 있다. 선분 B_0C_0 위에 꼭짓점 P_1 이 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_1, C_1 이 있는 직사각형 $AB_1P_1C_1$ 을 $\overline{P_1B_1} : \overline{P_1C_1} = 1 : 1$ 이 되도록 그린다. 선분 B_1C_1 위에 꼭짓점 P_2 가 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_2, C_2 가 있는 직사각형 $AB_2P_2C_2$ 를 $\overline{P_2B_2} : \overline{P_2C_2} = 1 : 2$ 가 되도록 그린다. 이와 같은 방법으로 선분 $B_{n-1}C_{n-1}$ 위에 꼭짓점 P_n 이 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_n, C_n 이 있는 직사각형 $AB_nP_nC_n$ 을 $\overline{P_nB_n} : \overline{P_nC_n} = 1 : n$ 이 되도록 그린다.

선분 P_nB_n 의 길이를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값은?

(단, 점 B_n 은 선분 AB_0 위에 있다.) [4점]



- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

단답형(22 ~ 30)

22. $\sum_{k=1}^{10} 2k(k+1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 32 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열을

이룰 때, $\sum_{k=1}^{11} |\log_2 a_k|$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-5}{7}\right)^n$ 이 수렴하기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

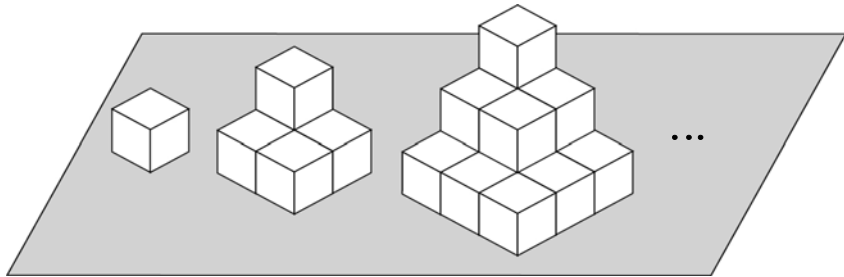
$$a_{n+1} = 2a_n \text{ 을 만족시킬 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n+2} + a_8}{a_{3n-2} + a_2} \text{ 의 값을 구하시오.}$$

[3점]

26. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B 가 $A^2 - A + E = O$,

$$B^2 + 2B = O \text{ 을 만족시킬 때, } A^7 B^7 = kAB \text{ 이 성립하도록 하는 실수 } k \text{ 의 값을 구하시오. (단, } E \text{ 는 단위행렬이고 } O \text{ 는 영행렬이다.) [3점]}$$

27. 불투명한 평면 위에 크기가 같은 정육면체 모양의 나무 블록을 이용하여 그림과 같은 규칙으로 n 층을 쌓고 한 면이라도 보이는 나무 블록의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 13$ 이다. 이때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n a_{n+1} - 2 = \sum_{k=1}^n a_k^2$ 을 만족시킬 때, $a_8 = pa_5 + qa_4$ 를 만족하는 두 자연수 p, q 에 대하여 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면 위에 두 점 $A(4, 0)$, $B(0, -3)$ 이 있고, 자연수 n 에 대하여 점 P_n 이 원 $C_n : (x+2)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2$ 위를 움직일 때, 다음 [단계]와 같이 수열 $\{a_n\}$ 을 정한다.

- [1 단계] 원 C_1 위를 움직이는 점 P_1 에 대하여 삼각형 ABP_1 의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_1 이라 하자.
 [2 단계] 원 C_2 위를 움직이는 점 P_2 에 대하여 삼각형 ABP_2 의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_2 라 하자.
 ∴
 [n 단계] 원 C_n 위를 움직이는 점 P_n 에 대하여 삼각형 ABP_n 의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차를 a_n 이라 하자.

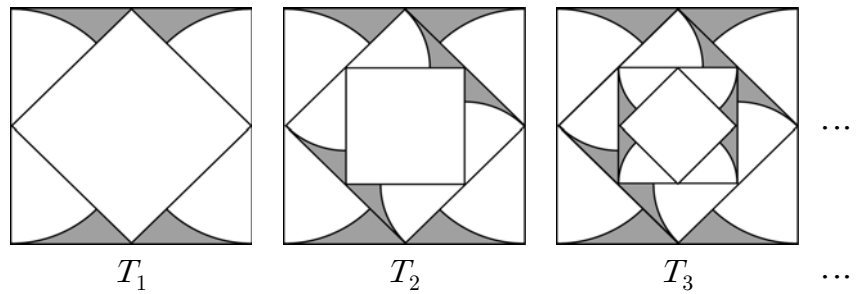
이때, $\sum_{n=1}^{19} a_n a_{n+1}$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 R 의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R 의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_1 을 붙여서 만든 \bowtie 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1 이라 하자.

그림 T_1 에서 정사각형 R_1 의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_1 의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_2 를 붙여서 만든 \bowtie 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2 라 하자.

그림 T_2 에서 정사각형 R_2 의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_2 의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_3 을 붙여서 만든 \bowtie 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림을 T_n 이라 하고 그림 T_n 에 색칠되어 있는 모든 \bowtie 모양의 넓이의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p + q\pi$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



* 확인 사항
 ◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.