

2012학년도 11월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[A형]

1	5	2	3	4	4	3	5	1
6	4	7	8	2	9	3	10	3
11	2	12	1	13	4	14	4	15
16	1	17	3	18	1	19	4	20
21	3	22	48	23	12	24	6	25
26	17	27	13	28	675	29	297	30

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$$(준식) = (2^3)^{\frac{2}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^2 \times 2 = 8$$

2. [출제의도] 행렬 연산하기

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10} (2n-3) = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 3 \cdot 10 = 80$$

4. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$$(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x + 3 = 0, (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) = 0$$

$$\log_3 x = 1 \text{ 또는 } \log_3 x = 3 \text{ 이므로}$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 27 \text{ 이다.}$$

따라서 $\alpha + \beta = 30$

5. [출제의도] 등차수열의 일반항 이해하기

첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 3n - 2$ 이고,
 첫째항이 1000, 공차가 -6인 등차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = -6n + 1006$ 이다.
 $a_k = b_k$ 이므로 $3k - 2 = -6k + 1006$ 이다.
 따라서 $k = 112$

6. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$$2^{2a+b} = 27 \text{ 이고,}$$

$$4^{a-3b} = \frac{1}{25} \text{ 에서 } 2^{2(a-3b)} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{ 이므로 } 2^{a-3b} = \frac{1}{5}$$

이다.

$$\text{따라서 } 2^{3a-2b} = 2^{2a+b} \cdot 2^{a-3b} = \frac{27}{5}$$

7. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 3, 공비가 2이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 4인 등비수열이다.
 따라서 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{3(4^5 - 1)}{4 - 1} = 1023$

8. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+6} \leq 27^{2-x} \text{ 에서 } 3^{-x-3} \leq 3^{-3x+6} \text{ 이므로}$$

$$x \leq \frac{9}{2} \text{ 이다.}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수는 1, 2, 3, 4이므로 x 의 값의 합은 10

9. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

지수함수 $y = a \cdot 3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭 이동시키면 함수 $y = -a \cdot 3^{-x}$ 의 그래프이고, 이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수 $y = -a \cdot 3^{-x+2} + 3$ 의 그래프이다.
 함수 $y = -a \cdot 3^{-x+2} + 3$ 의 그래프가 점 (1, -6)을 지나므로 $-6 = -a \cdot 3^{-1+2} + 3$
 따라서 $a = 3$

10. [출제의도] 등비증항을 활용하여 문제해결하기

점 C는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표 $y = \frac{6+2x}{3}$ 이다.
 $x, \frac{6+2x}{3}, 6$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $\left(\frac{6+2x}{3}\right)^2 = 6x$ 이다.
 $2x^2 - 15x + 18 = 0$
 따라서 $(2x-3)(x-6) = 0$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$ ($\because x < 6$)

11. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_2 \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \log_2 \sqrt{7+2\sqrt{12}} = \log_2(2+\sqrt{3})$$

$$2 < 2+\sqrt{3} < 4 \text{ 이므로 } 1 < \log_2(2+\sqrt{3}) < 2 \text{ 이다.}$$

$$\alpha = \log_2(2+\sqrt{3}) - 1 = \log_2 \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $2^{-\alpha} = 2^{-\log_2 \frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}$

12. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제해결하기

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \text{ 에서 } a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

$$a_n + 1 = b_n \text{ 이라고 하면, 수열 } \{b_n\} \text{ 은 첫째항이 } a_1 + 1 = 2, \text{ 공비가 } 2 \text{ 인 등비수열이므로}$$

$$b_n = a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1} = 2^n$$

따라서 $\log_4(a_{20} + 1) = \log_4 2^{20} = \log_4 4^{10} = 10$

13. [출제의도] 행렬과 그 성질 이해하기

$$A^2 - 2A + E = O \text{ 에서 } A^2 = 2A - E \text{ 이고,}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (2A - E) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

따라서 $a = 0, b = 4$ 이므로 $a + b = 4$

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

$n \geq 2$ 에 대하여 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ 에서 $a_n - a_{n-1} = 2n - 1$ 이므로 $n \geq 1$ 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$ 이다.
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$ 이므로 $f(k) = 2k + 1$ 이다.
 $a_{20} = 1 + \sum_{k=1}^{19} (2k+1) = 400$ 이므로 $c = 400$ 이다.
 따라서 $f(10) + c = 21 + 400 = 421$

15. [출제의도] 역행렬과 행렬 연산 이해하기

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, A + E = AB \text{ 에서}$$

$$B = A^{-1}(A + E) = E + A^{-1} \text{ 이므로}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 4

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$$f(n) = \frac{5}{n}, g(n) = (n-1)!$$

따라서 $f(20) \times g(7) = \frac{5}{20} \times 6! = 180$

17. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

R_2 가 R_1 의 2배인 원통형 축전기의 전기용량이 5(F)이므로

$$5 = \frac{2\pi kL}{\log 2R_1 - \log R_1} = \frac{2\pi kL}{\log \frac{2R_1}{R_1}} = \frac{2\pi kL}{\log 2} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 2\pi kL = 5 \log 2$$

따라서 R_2 가 R_1 의 8배인 원통형 축전기의 전기용량(F)은

$$\frac{2\pi kL}{\log 8R_1 - \log R_1} = \frac{5 \log 2}{\log \frac{8R_1}{R_1}} = \frac{5 \log 2}{\log 8} = \frac{5 \log 2}{3 \log 2} = \frac{5}{3}$$

18. [출제의도] 등차수열을 활용하여 수열 추론하기

n 행 n 열의 수는 $(2n-1)$ 이고, n 행의 모든 수들은 1열부터 $(2n-1)$ 열까지 이 순서대로 공차가 $(2n-3)$ 인 등차수열을 이루므로 $a_n = (2n-1) + 2(2n-3) = 6n - 7$ 이다.
 따라서 $\sum_{n=3}^{10} a_n = \frac{8(2 \cdot 11 + 7 \cdot 6)}{2} = 256$

19. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. (반례) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $(A+2B)^2 = (A-2B)^2$ 에서 $A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2 = A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2$
 $4AB + 4BA = O$
 $\therefore AB + BA = O$ (참)

ㄷ. $AB = A \dots \dots \text{㉠}, BA = B \dots \dots \text{㉡}$
 ㉠의 양변 오른쪽에 행렬 A를 곱하면 $ABA = A^2$, 이 식에 ㉡을 대입하면 $A^2 = AB = A$ 이고,
 ㉡의 양변 오른쪽에 행렬 B를 곱하면 $BAB = B^2$, 이 식에 ㉠을 대입하면 $B^2 = BA = B$ 이다.
 $\therefore A^2 + B^2 = A + B$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$3 \cdot 2^x = 4^x, 2^x(2^x - 3) = 0, x = \log_2 3$ ($\because 2^x > 0$)이므로 점 B의 좌표는 $(\log_2 3, 9)$ 이다.
 세 점 A, C, D의 좌표는 각각 $(0, 3), (\log_2 3, 3), (2 \log_2 3, 9)$ 이다.
 그러므로 사각형 ACDB는 밑변의 길이가 $\log_2 3$ 이고 높이가 6인 평행사변형이다.
 따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $6 \log_2 3$

21. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

ㄱ. 곡선 $y = \log_a x$ 가 직선 $y = x$ 와 점 (p, p) 에서 만나고 $p = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} = \log_a \frac{1}{2}, a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$\therefore a = \frac{1}{4}$ (참)

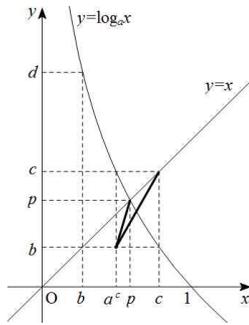
ㄴ. 곡선 $y = \log_a x$ 가 두 점 (b, d) , (c, b) 를 지나므로 $\log_a b = d$, $\log_a c = b$

$a^d = b$, $a^b = c$ 이므로 $a^{b+d} = a^b \cdot a^d = bc$ (참)

ㄷ. $\frac{p-b}{p-a^c}$ 는 두 점 (p, p) , (a^c, b) 를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{c-b}{c-a^c}$ 는 두 점 (c, c) , (a^c, b) 를

지나는 직선의 기울기이다. (거짓)

(반례)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] a_n 과 S_n 사이의 관계 이해하기

$a_5 = S_5 - S_4 = (3 \cdot 2^5 - 3) - (3 \cdot 2^4 - 3) = 48$

23. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

$\begin{pmatrix} 2a & a-1 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 10y \end{pmatrix}$ 에서 $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 2 & a-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 $a(a-10) - 2(a-1) = 0$, $a^2 - 12a + 2 = 0$ 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 합은 12

24. [출제의도] 행렬의 뜻을 이해하여 문제해결하기

a_{11} = (원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x=1$ 이 만나는 점의 개수) = 2

a_{12} = (원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x=2$ 가 만나는 점의 개수) = 1

a_{21} = (원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x=1$ 이 만나는 점의 개수) = 1

a_{22} = (원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $x=2$ 가 만나는 점의 개수) = 2

$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은 6

25. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$3^{2x} - k \cdot 3^x + 4 = 0$ 에서 $3^x = t (t > 0)$ 라 하면

이차방정식 $t^2 - kt + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

i) 판별식 $D = k^2 - 16 > 0$, $k < -4$ 또는 $k > 4$

ii) (두 근의 합) = $k > 0$, (두 근의 곱) = $4 > 0$

$\therefore k > 4$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 5

26. [출제의도] 로그부등식을 활용하여 문제해결하기

$\left(\log_2 \frac{x}{a}\right) \left(\log_2 \frac{x^2}{a}\right) + 2 \geq 0$ 에서

$(\log_2 x - \log_2 a)(2\log_2 x - \log_2 a) + 2 \geq 0$

$2(\log_2 x)^2 - 3(\log_2 a)(\log_2 x) + (\log_2 a)^2 + 2 \geq 0$

$\log_2 x = t$ 라 하면

$2t^2 - 3(\log_2 a)t + (\log_2 a)^2 + 2 \geq 0$

주어진 부등식이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립하려면 위 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립하여야 하므로

판별식 $D = 9(\log_2 a)^2 - 8\{(\log_2 a)^2 + 2\} \leq 0$ 이다.

$(\log_2 a)^2 - 16 \leq 0$, $-4 \leq \log_2 a \leq 4$

$\frac{1}{16} \leq a \leq 16$ 이므로 $M = 16$, $m = \frac{1}{16}$ 이다.

따라서 $M + 16m = 17$

27. [출제의도] 알고리즘과 순서도 이해하여 추론하기

n	a
1	$-3 + 3 = 0$
2	$0 + 5 = 5$
3	$-5 + 7 = 2$
4	$-2 + 9 = 7$
5	$-7 + 11 = 4$
6	$-4 + 13 = 9$
7	$-9 + 15 = 6$
8	$-6 + 17 = 11$
9	$-11 + 19 = 8$
10	$-8 + 21 = 13$

따라서 인쇄되는 a 의 값은 13

28. [출제의도] 여러 가지 수열 추론하기

$\sum_{n=1}^{50} n \left(\sin \frac{n}{2} \pi + \cos \frac{n}{2} \pi \right)^n$

$= 1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 - 7 + 8$

$+ \dots + 41 + 42 - 43 + 44 + 45 + 46 - 47 + 48 + 49 + 50$

$= \sum_{n=1}^{50} n - 2 \sum_{n=1}^{25} (4n-1) = 1275 - 600 = 675$

29. [출제의도] 로그를 이해하여 문제해결하기

$P_1(0, 0)$, $P_3(0, \log 3)$, $P_{10}(1, 0)$ 이다.

$10 < m < 100$ 이므로 $\log m$ 의 지표는 1이고, 가수는 $(\log m - 1)$ 이므로 점 P_m 의 좌표는 $(1, \log m - 1)$

이다.

(사각형 $P_1 P_{10} P_m P_3$ 의 넓이)

$= \frac{1}{2} (\log 3 + \log m - 1) = \frac{1}{2} \log \frac{3m}{10}$ 이므로

자연수 m 이 최대일 때 사각형 $P_1 P_{10} P_m P_3$ 의 넓이는 최대이다.

따라서 $m = 99$ 일 때, $\log M = \frac{1}{2} \log \frac{297}{10}$

$\therefore M = \sqrt{\frac{297}{10}}$

따라서 $10M^2 = 297$

30. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$a_1 = 1$, $a_{2n} = 1 + a_n$ 이므로

$a_2 = 2$, $a_4 = 3$, $a_8 = 4$, $a_{16} = 5$, $a_{32} = 6$, $a_{64} = 7$ 이다.

그리고 $a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$ 이므로 $a_{65} = \frac{1}{7}$ 이다.

따라서 $k = 65$