# 2012학년도 11월 고2 전국연합학력평가
# 정답 및 해설

## • 2교시 수학 영역 •

### [B 형]

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ⑤ | **2** | ② | **3** | ② | **4** | ③ | **5** | ② |
| **6** | ④ | **7** | ③ | **8** | ④ | **9** | ③ | **10** | ④ |
| **11** | ⑤ | **12** | ① | **13** | ③ | **14** | ④ | **15** | ⑤ |
| **16** | ① | **17** | ③ | **18** | ① | **19** | ④ | **20** | ① |
| **21** | ⑤ | **22** | 2 | **23** | 12 | **24** | 50 | **25** | 18 |
| **26** | 30 | **27** | 4 | **28** | 8 | **29** | 297 | **30** | 65 |

1. ‘A’형과 같음

2. ‘A’형과 같음

3. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x\tan x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}2\cdot\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}=2$

4. ‘A’형과 같음

5. [출제의도] 분수방정식 이해하기

$\dfrac{a^2+1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$의 양변에 분모의 최소공배수 $2(x-2)(x+1)$을 곱하면

$2(a^2+1)+2(x-2)=(x-2)(x+1)$

$x^2-3x-2a^2=0$

판별식 $D=9+8a^2>0$이므로 이 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

따라서 주어진 분수방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 두 근 중 한 근이 무연근이 되어야 한다.

ⅰ) 무연근이 2인 경우

$a^2=-1$이므로 조건을 만족시키는 실수 $a$는 존재하지 않는다.

ⅱ) 무연근이 $-1$인 경우

$a^2=2\quad\therefore a=\sqrt{2}$ 또는 $a=-\sqrt{2}$

이때, 실근 $x=4$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 $a$의 값의 곱은 $\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

6. [출제의도] 고차부등식 이해하기

$x^3-x^2-4x+4>0$에서

$(x+2)(x-1)(x-2)>0$이므로

$-2<x<1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$(x+2)(x-a)<0$에서 $a\le-2$이면

주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않으므로 $a>-2$이고

$-2<x<a$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 정수 $x$의 개수가 3이 되려면 $3<a\le4$이다.

따라서 $a$의 최댓값은 4

7. ‘A’형과 같음

8. [출제의도] 삼각함수의 합성을 활용하여 문제해결하기

$y=\sin2x+\sin x+\cos x$에서

$\sin x+\cos x=t$라 하면 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$이다.

또 $\sin2x=(\sin x+\cos x)^2-1=t^2-1$이므로

$y=t^2+t-1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\ (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$이다.

그러므로 $t=\sqrt{2}$일 때 함수의 최댓값은 $1+\sqrt{2}$,

$t=-\dfrac{1}{2}$일 때 함수의 최솟값은 $-\dfrac{5}{4}$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}$

9. ‘A’형과 같음

10. [출제의도] 분수부등식을 그래프를 이용하여 이해하기

$\dfrac{g(x)}{f(x)+3}-\dfrac{g(x)}{f(x)-3}\le0$의 좌변의 분모를 통분하여 정리하면

$\dfrac{-6g(x)}{\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}}\le0$

$g(x)\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}\ge0,\ f(x)\ne3, f(x)\ne-3$

ⅰ) $g(x)\ge0,\ \{f(x)+3\}\{f(x)-3\}>0$의 해집합은

$\{x\mid-3\le x\le3\}\cap\{x\mid x<-1$ 또는 $x>5\}$

$=\{x\mid-3\le x<-1\}$

ⅱ) $g(x)\le0,\ \{f(x)+3\}\{f(x)-3\}<0$의 해집합은

$\{x\mid x\le-3$ 또는 $x\ge3\}\cap\{x\mid-1<x<5\}$

$=\{x\mid3\le x<5\}$

주어진 분수부등식의 해집합은

$\{x\mid-3\le x<-1$ 또는 $3\le x<5\}$이다.

따라서 주어진 식을 만족시키는 정수는 $-3,\ -2,\ 3,\ 4$이므로 모든 정수 $x$의 값의 곱은 72

11. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$25x^2-25x+4=0$의 두 근이 $\dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{5}$이고 주어진 조건에 의하여 $\sin(a-b)<\sin(a+b)$이므로

$\sin(a+b)=\dfrac{4}{5},\ \sin(a-b)=\dfrac{1}{5}$이다.

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b=\dfrac{4}{5}$ …… ㉠

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b=\dfrac{1}{5}$ …… ㉡

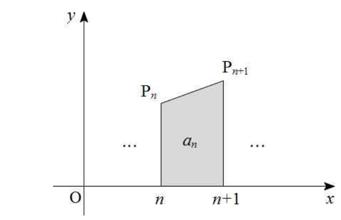
㉠, ㉡에 의하여

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2},\ \cos a\sin b=\dfrac{3}{10}$

따라서 $\dfrac{\tan a}{\tan b}=\dfrac{\sin a\cos b}{\cos a\sin b}=\dfrac{5}{3}$

12. ‘A’형과 같음

13. [출제의도] 무한급수 수렴조건 활용하여 추론하기




$P_n$의 $y$좌표를 $y_n$이라 하면

$y_n=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$이다.

$a_n=\dfrac{1}{2}(y_n+y_{n+1})$

$=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n}\right)=2-\dfrac{3}{2^{n+1}}$이다.

무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha)$가 수렴하면

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$이다.

따라서 $\alpha=2$

14. ‘A’형과 같음

15. ‘A’형과 같음

16. ‘A’형과 같음

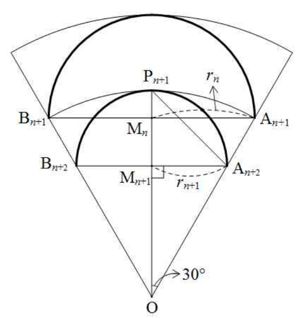
17. ‘A’형과 같음

18. ‘A’형과 같음

19. ‘A’형과 같음

20. [출제의도] 무한급수를 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 $n$번째 얻은 반원의 반지름의 길이를 $r_n$, 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점을 $M_n$이라 하자.




$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OM_{n+1}}+\overline{M_{n+1}P_{n+1}}$

$=\sqrt{3}r_{n+1}+r_{n+1}=2r_n$

$\therefore r_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}r_n=(\sqrt{3}-1)r_n$

$r_1=\sqrt{3}-1$이므로 $r_n=(\sqrt{3}-1)^n$이고

$l_n=6\pi(\sqrt{3}-1)^n$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $6(\sqrt{3}-1)\pi$이고 공비가 $(\sqrt{3}-1)$인 등비수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{6(\sqrt{3}-1)\pi}{1-(\sqrt{3}-1)}=6(1+\sqrt{3})\pi$이다.

21. [출제의도] 삼각함수와 삼각방정식을 활용하여 추론하기

$f(x)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=1+\sin\dfrac{\pi}{3}x$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이다. (참)

ㄴ. $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)=6$이고 함수 $f(x)$의 주기가 6이므로

$\sum\limits_{n=1}^{2012}f(n)=6\times335+\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2012+\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. $f(x)-\cos\dfrac{2\pi}{3}x=0$

$1+\sin\dfrac{\pi}{3}x-\left(1-2\sin^2\dfrac{\pi}{3}x\right)=0$

$\sin\dfrac{\pi}{3}x\left(1+2\sin\dfrac{\pi}{3}x\right)=0$

$\sin\dfrac{\pi}{3}x=0$ 또는 $\sin\dfrac{\pi}{3}x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<10$에서

ⅰ) $\sin\dfrac{\pi}{3}x=0$일 때 $x=3$ 또는 $x=6$ 또는 $x=9$

ⅱ) $\sin\dfrac{\pi}{3}x=-\dfrac{1}{2}$일 때 $x=\dfrac{7}{2}$ 또는 $x=\dfrac{11}{2}$ 또는 $x=\dfrac{19}{2}$

그러므로 모든 실근의 합은 $\dfrac{73}{2}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**22. [출제의도] 함수의 연속 이해하기**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$$

따라서 $x-1=t$라 하면

$$a=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}2\cdot\frac{e^{2t}-1}{2t}=2$$

**23. ‘A’형과 같음**

**24. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기**

$y=\dfrac{1}{n}x^2$과 $x^2+y^2=1$에서 $y^2+ny-1=0$이고,

$y>0$이므로 $y=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ 이다.

삼각형 $\mathrm{OAP}_n$의 넓이 $S_n=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{4}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-n+\sqrt{n^2+4}\right)}{4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2+4}}=\frac{1}{2}$$ 이므로 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

따라서 $100\alpha=50$

**25. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기**

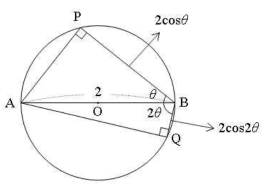
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로 $a_n=3n-2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(3n+1)}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n-2)(3n+1)}{n(n+1)}$$

$$=18$$

**26. [출제의도] 삼각함수의 배각 공식 이해하기**




$\overline{\mathrm{PB}}=2\cos\theta$이므로

$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cos\theta\cdot\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

$\overline{\mathrm{QB}}=2\cos 2\theta$이므로

$\triangle\mathrm{AQB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cos 2\theta\cdot\sin 2\theta$

$=2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$\triangle\mathrm{ABP}=4\triangle\mathrm{AQB}$이므로

$\sin 2\theta=4\cdot 2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$\sin 2\theta(1-8\cos 2\theta)=0$

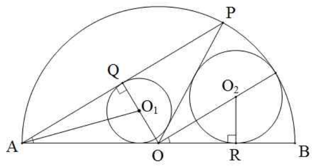
$\sin 2\theta\neq 0$이므로 $\cos 2\theta=\dfrac{1}{8}$이다.

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1}{8}$ 이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{9}{16}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ ( $\because \cos\theta>0$ )

따라서 $40\cos\theta=30$

**27. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기**




그림과 같이 원 $\mathrm{O}_1$과 직선 AP와의 접점을 점 Q, 원 $\mathrm{O}_2$와 직선 AB와의 접점을 점 R라 하고, 원 $\mathrm{O}_1$의 반지름을 $r_1$, 원 $\mathrm{O}_2$의 반지름을 $r_2$라 하자.

삼각형 QAO에서 $\overline{\mathrm{AQ}}=\cos\theta$, $\angle\mathrm{QAO}_1=\dfrac{\theta}{2}$이므로

$r_1=\cos\theta\tan\dfrac{\theta}{2}$ 이다.

$\therefore f(\theta)=\pi\cos^2\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}$

부채꼴 OBP에서 $\angle\mathrm{O}_2\mathrm{OR}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OO}_2}=\dfrac{r_2}{\sin\theta}$ 이다.

$\dfrac{r_2}{\sin\theta}+r_2=1$이므로 $r_2=\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$ 이다.

$\therefore g(\theta)=\dfrac{\pi\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\sin^2\theta}{\pi\cos^2\theta\tan^2\dfrac{\theta}{2}(1+\sin\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\dfrac{\theta^2}{4}}{\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta(1+\sin\theta)^2}$$

$=4$

**28. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 문제해결하기**

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$ 에서

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ 1 & (|x|<1) \\ 1 & (x=1) \\ 0 & (x=-1) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 $x$에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)g(x-a)$

$=\lim\limits_{x\to-1-0}x\{(x-a)^2+10(x-a)\}$

$=-(a+1)(a-9)$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)g(x-a)$

$=\lim\limits_{x\to-1+0}1\cdot\{(x-a)^2+10(x-a)\}$

$=(a+1)(a-9)$ …… ㉡

$f(-1)g(-1-a)=0\times g(-1-a)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 값이 모두 같아야 하므로

$a=-1$ 또는 $a=9$이다.

따라서 모든 상수 $a$의 값의 합은 8

**29. ‘A’형과 같음**

**30. ‘A’형과 같음**