수학 영역 (B형)

성명		수험번호						2				

- ○ 자신이 선택한 유형(‘A’형 / ‘B’형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 기입하시오.
- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $8^{\frac{2}{3}} \times 16^{\frac{1}{4}}$의 값은? [2점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-2B$는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \tan x}{x^2}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 로그방정식 $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

5. 분수방정식 $\frac{a^2+1}{(x-2)(x+1)}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

6. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^3-x^2-4x+4>0 \\ (x+2)(x-a)<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값은? [3점]

① 1019 ② 1021 ③ 1023
④ 1025 ⑤ 1027

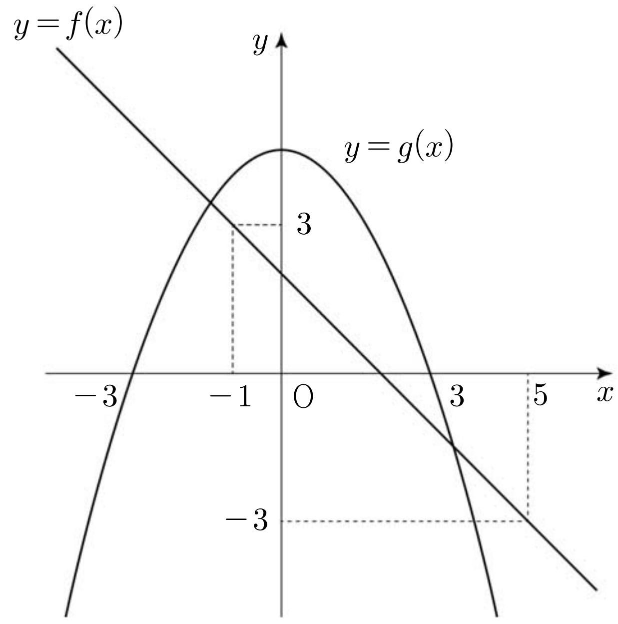
$8.$ 함수 $y = \sin 2x + \sin x + \cos x$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $-\sqrt{2}-\frac{1}{3}$　② $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$　③ 0
④ $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$　⑤ 2

$9.$ 좌표평면에서 지수함수 $y = a \cdot 3^x (a \neq 0)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1, -6)$을 지난다. 이때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

$10.$ 그림은 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $y = g(x)$의 그래프이다.



분수부등식

$$\frac{g(x)}{f(x)+3} - \frac{g(x)}{f(x)-3} \leq 0$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 곱은?
(단, $f(-1)=3$, $f(5)=-3$, $g(-3)=g(3)=0$) [4점]

① 48　② 56　③ 60
④ 72　⑤ 84

11. 이차방정식 $25x^2-25x+4=0$의 두 근이

$\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$일 때, $\dfrac{\tan a}{\tan b}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<b<a<\dfrac{\pi}{4}\right)$ [4점]

① $\dfrac{3}{5}$　② $\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{4}{5}$　④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{3}$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

을 만족시킬 때, $\log_4(a_{20}+1)$의 값은? [3점]

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

13. 모든 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
> (나) 점 P_n의 x좌표는 n이다.
> (다) 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2^n}$이다.

두 직선 $x=n$, $x=n+1$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라 하자. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha)$가 수렴할 때, 상수 α의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{7}{4}$　③ 2
④ $\dfrac{9}{4}$　⑤ 3

14. 다음은 어느 포털 사이트에 게시된 질문과 답변이다.

질문 a_{20}의 값을 구하는 데 어디가 틀렸을까요?

저는 고등학교 2학년 학생입니다. 궁금한 것이 있어 글을 올립니다.
먼저 [문제]와 저의 [풀이]를 보시고 [질문]에 답해 주세요.

[문제]
수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고,
$a_n=a_{n-1}+2n-1\ (n\geq 2)$
을 만족시킬 때, a_{20}의 값을 구하시오.

[풀이]
$n\geq 2$일 때, $a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$
$\therefore\ a_{20}=362$

[질문]
저는 잘 푼 것 같은데 정답이 362가 아니라고 합니다. 제가 어디가 틀렸을까요?
틀린 부분과 정답을 알려주세요.

답변 좋은 질문입니다.　**추천하기**

학생의 [풀이]에서
$n\geq 2$일 때, $a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\text{(가)}}$
로 식을 수정하여 a_{20}의 값을 계산하면
$a_{20}=\boxed{\text{(나)}}$입니다.

위의 답변이 옳을 때, (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 c라 하자. 이때, $f(10)+c$의 값은? [3점]

① 415　② 417　③ 419
④ 421　⑤ 423

15. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A+E=AB$를 만족시키는 행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)a_{n+2}+5a_n=(n+5)a_{n+1}$$

을 만족시킨다.
다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

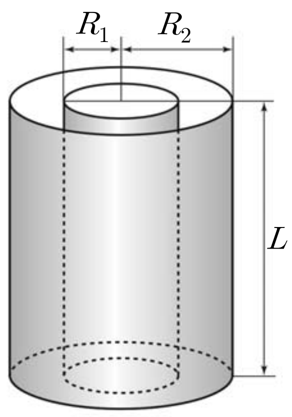
> 모든 자연수 n에 대하여
> $(n+1)a_{n+2}-5a_{n+1}=na_{n+1}-5a_n$
> 이다.
> $n \geq 2$에 대하여
> $na_{n+1}-5a_n=(n-1)a_n-5a_{n-1}$이고,
> $a_1=1$, $a_2=5$이므로
> $a_{n+1}=\boxed{\text{(가)}}\,a_n \ (n \geq 1) \cdots\cdots$ ㉠
> 이다.
> ㉠의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 얻어진 $(n-1)$개의 등식을 변끼리 곱하여 정리하면,
> $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{\boxed{\text{(나)}}} \ (n \geq 2)$ 이고, $a_1=1$이므로
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{\boxed{\text{(나)}}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(20)\times g(7)$의 값은? [4점]

① 180 ② 190 ③ 200
④ 210 ⑤ 220

17. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 각각 R_1(m), R_2(m) $(R_1 < R_2)$이고 높이가 L(m)인 두 원기둥 모양의 도체를 이용하여 밑면의 중심이 일치하도록 만든 원통형 축전기의 전기용량 C(F)는 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$C = \frac{2\pi kL}{\log R_2 - \log R_1} \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$



높이 L이 일정할 때, R_2가 R_1의 2배인 원통형 축전기의 전기용량이 5(F)이면, R_2가 R_1의 8배인 원통형 축전기의 전기용량(F)은? [3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

18. 그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 3개, 3행에는 5개, $\cdots$, n행에는 $(2n-1)$개의 수가 다음과 같은 규칙으로 나열되어 있다.

(가) $n \ge 1$일 때, n행 n열의 수는 $(2n-1)$이다.
(나) $n \ge 2$일 때, n행의 모든 수들은 1열부터 $(2n-1)$열까지 이 순서대로 공차가 $(2n-3)$인 등차수열을 이룬다.

	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	$\cdots$
1행	1							
2행	2	3	4					
3행	-1	2	5	8	11			
4행	-8	-3	2	7	12	17	22	
$\vdots$				$\vdots$				

n행 $(n+2)$열의 수를 $a_n (n \ge 3)$이라 할 때, $\sum_{n=3}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 256 ② 266 ③ 276 ④ 286 ⑤ 296

19. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

〈보 기〉

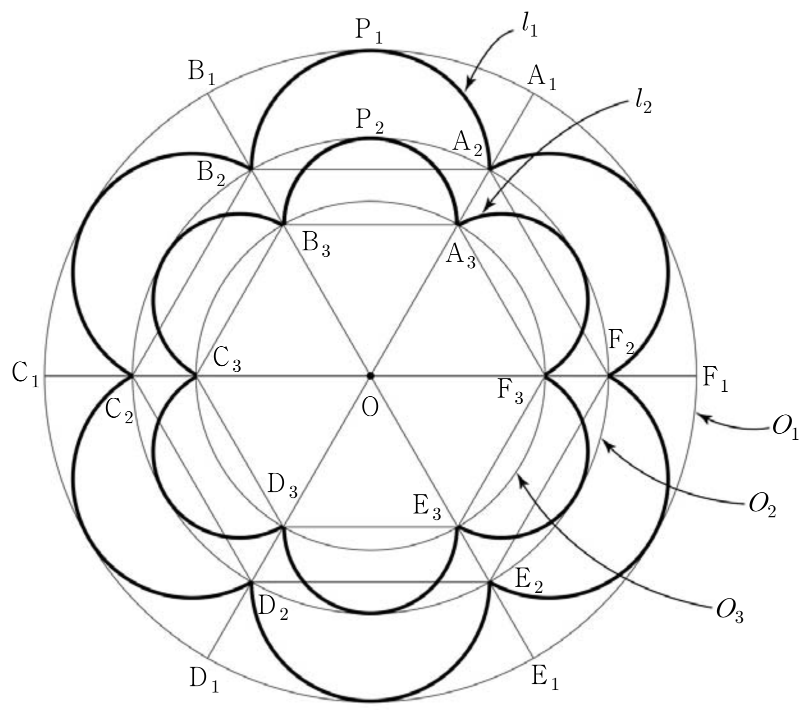
ㄱ. $A^2 = E$이면 $A = E$이다.

ㄴ. $(A+2B)^2 = (A-2B)^2$이면 $AB+BA=O$이다.

ㄷ. $AB=A$, $BA=B$이면 $A^2+B^2=A+B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1의 6등분점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.
중심각의 크기가 $60°$ 인 부채꼴 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$의 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$의 이등분점을 P_1이라 하고, 선분 OA_1 위에 $\angle \mathrm{OP}_1\mathrm{A}_2 = 45°$ 가 되도록 점 A_2를 정한다. 중심이 O이고 선분 OA_2를 반지름으로 하는 원 O_2가 5개의 선분 OB_1, OC_1, OD_1, OE_1, OF_1과 만나는 점을 각각 B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하고, 원 O_2의 외부에 정육각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2\mathrm{E}_2\mathrm{F}_2$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_1이라 하자.
중심각의 크기가 $60°$ 인 부채꼴 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2$의 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$의 이등분점을 P_2라 하고, 선분 OA_2 위에 $\angle \mathrm{OP}_2\mathrm{A}_3 = 45°$ 가 되도록 점 A_3을 정한다. 중심이 O이고 선분 OA_3을 반지름으로 하는 원 O_3이 5개의 선분 OB_2, OC_2, OD_2, OE_2, OF_2와 만나는 점을 각각 B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하고, 원 O_3의 외부에 정육각형 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3\mathrm{D}_3\mathrm{E}_3\mathrm{F}_3$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $6(1+\sqrt{3})\pi$ ② $6(2+\sqrt{3})\pi$
③ $12(1+\sqrt{3})\pi$ ④ $12(2+\sqrt{3})\pi$
⑤ $12(1+2\sqrt{3})\pi$

21. 함수 $f(x)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{4}\right)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)$의 주기는 6이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{2012} f(n)=2012+\sqrt{3}$

ㄷ. $0<x<10$일 때, 방정식 $f(x)-\cos\frac{2\pi}{3}x=0$의 모든 실근의 합은 $\frac{73}{2}$이다.

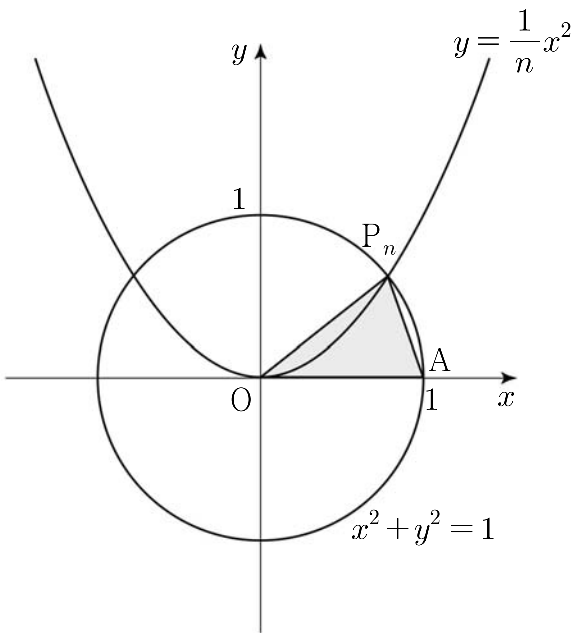
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{e^{2x-2}-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

23. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 2a & a-1 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax \\ 10y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{n}x^2$과 원 $x^2+y^2=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자. 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에 대하여 삼각형 OAP_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} nS_n=\alpha$이다. 이때, 100α의 값을 구하시오. [3점]



25. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_2=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

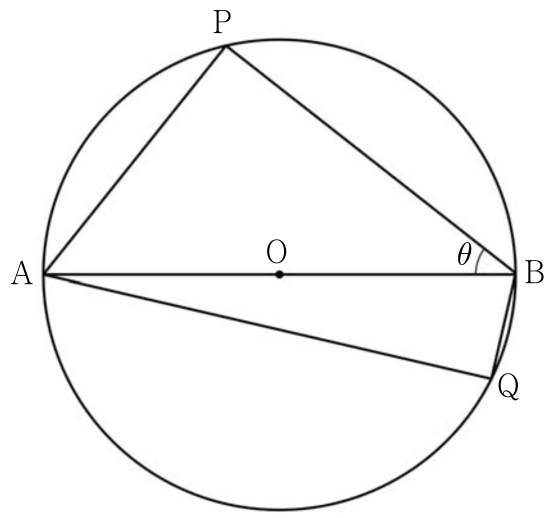
$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{1+2+3+\cdots+n}$의 값을 구하시오.

[3점]

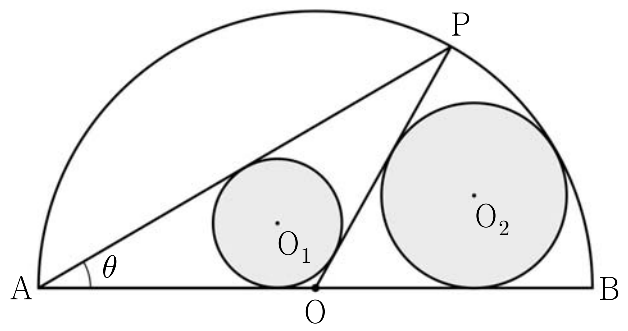
26. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q를 $\angle\mathrm{ABQ}=2\angle\mathrm{ABP}$이고 삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 AQB의 넓이의 4배가 되도록 정한다. $\angle\mathrm{ABP}=\theta$라 할 때, $40\cos\theta$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

[4점]



27. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP에 내접하는 원을 O_1, 부채꼴 OBP에 내접하는 원을 O_2라 하자.

$\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$일 때, 원 O_1의 넓이를 $f(\theta)$, 원 O_2의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. 이때, $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값을 구하시오. [4점]



28. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}, \quad g(x) = x^2 + 10x$$

이다. 함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

29. k가 자연수일 때, $\log k$의 지표 n과 가수 α에 대하여 좌표평면 위의 점 P_k를 $\mathrm{P}_k(n, \alpha)$라 하자.

$10 < m < 100$인 자연수 m에 대하여 사각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_m\mathrm{P}_3$의 넓이의 최댓값을 $\log M$이라 할 때, $10M^2$의 값을 구하시오. [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = 1 + a_n, \quad a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$$

을 만족시킨다. $a_k = \dfrac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.