2015학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	②	3	①	4	④	5	③
6	⑤	7	②	8	①	9	②	10	①
11	①	12	④	13	⑤	14	④	15	③
16	③	17	⑤	18	④	19	②	20	③
21	③	22	2	23	5	24	6	25	12
26	9	27	169	28	95	29	168	30	138

해 설

1. [출제의도] 두 집합이 서로 같을 조건을 이해하여 집합의 원소를 구한다.

두 집합 A와 B가 서로 같기 위해서는 두 집합에 속하는 원소가 모두 같아야 한다.
집합 A의 원소 $2,\ 3,\ x$가 모두 집합 B에 속해야 하고, 집합 B의 원소 $3,\ 4,\ 2y$도 모두 집합 A에 속해야 한다.
그러므로 $x=4$
$2y=2$에서 $y=1$
따라서 $x+y=4+1=5$

2. [출제의도] 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$x(2x+5)-x^2=2x^2+5x-x^2$$
$$=(2-1)x^2+5x$$
$$=x^2+5x$$

3. [출제의도] 인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 인수분해한다.

합이 -5이고 곱이 6인 두 수는 -2와 -3이므로 다음과 같이 인수분해한다.
$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

4. [출제의도] 일차함수의 뜻을 이해하고 함숫값을 구한다.

$f(x)=-3x+2$에 $x=\dfrac{1}{2}$을 대입하면
$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-3\times\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 이차방정식의 근의 뜻을 이해하고 상수의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-3ax+6=0$의 한 근이 a이므로
$x^2-3ax+6=0$에 $x=a$를 대입하면
$a^2-3a^2+6=0$
$-2a^2+6=0$
$a^2-3=0$
$a^2=3$
$a=\sqrt{3}$ 또는 $a=-\sqrt{3}$
a가 양수이므로 $a=\sqrt{3}$

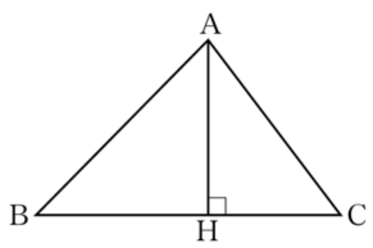
6. [출제의도] 이차함수의 그래프의 평행이동을 이해하고 조건을 만족하는 이차함수를 구한다.

이차함수 $y=x^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 이차함수 $y=(x-m)^2-2+n$의 그래프가 된다.
이 함수가 이차함수 $y=(x+1)^2+1$과 같으므로
$m=-1,\ -2+n=1$
$m=-1,\ n=3$
따라서 $m+n=-1+3=2$

[다른 풀이]

이차함수 $y=x^2-2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -2)$이고, 이차함수 $y=(x+1)^2+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,1)$이다. 이때 점 $(-1,1)$은 점 $(0,\ -2)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이다. 그러므로 이차함수 $y=(x+1)^2+1$의 그래프는 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 $m=-1,\ n=3$이므로
$m+n=-1+3=2$

7. [출제의도] 피타고라스 정리를 이해하고 삼각형의 변의 길이를 구한다.



그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

(삼각형 ABC의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$
$=\dfrac{1}{2}\times7\times\overline{AH}$
$=14$

따라서 $\overline{AH}=4$
삼각형 ACH에서 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{CH}^2=\overline{AC}^2-\overline{AH}^2$
$=5^2-4^2=9$
$\overline{CH}=3$
이때 $\overline{BH}=\overline{BC}-\overline{CH}$
$=7-3=4$
삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$
$=4^2+4^2=32$
따라서 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$

8. [출제의도] 제곱근의 성질을 이해하고 제곱근을 포함한 식을 계산한다.

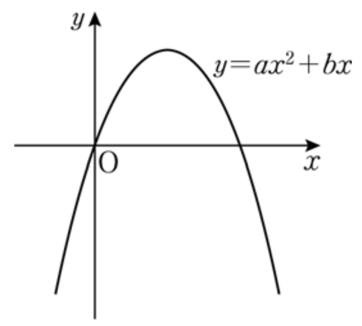
a의 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$이므로 $a=6$
12의 양의 제곱근은 $\sqrt{12}$이고 음의 제곱근은 $-\sqrt{12}$이다. 이때 b는 12의 음의 제곱근이므로
$b=-\sqrt{12}$
$=-\sqrt{2^2\times3}$
$=-2\sqrt{3}$
따라서 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{6}{-2\sqrt{3}}$
$=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

[보충 설명]

어떤 수 x를 제곱하여 a가 될 때, x를 a의 제곱근이라고 한다. 양수의 제곱근은 양수와 음수 두 개가 있고, 이 두 수의 절댓값은 서로 같다. 양수 a의 제곱근은 기호 $\sqrt{\ \ }$를 사용하여 양의 제곱근은 $\sqrt{a}$, 음의 제곱근은 $-\sqrt{a}$와 같이 나타낸다.

9. [출제의도] 제곱근의 성질과 이차함수의 그래프를 이해하여 조건에 맞는 그래프를 찾는다.

$\sqrt{k^2}=\begin{cases} k & (k>0) \\ -k & (k<0)\end{cases}$이므로
$\sqrt{a^2}=-a$에서 $a<0$
$\sqrt{b^2}=b$에서 $b>0$
$y=ax^2+bx$
$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)$
$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}\right)-\dfrac{b^2}{4a}$
$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}$
이므로 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 다음과 같다.
$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}\right)$
이때 $a<0,\ b>0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 위로 볼록하고
$-\dfrac{b}{2a}>0,\ -\dfrac{b^2}{4a}>0$
이다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프의 꼭짓점 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}\right)$은 제1사분면에 있다.
또한, 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 $x=0$일 때 $y=0$이므로 y절편은 0이 되어 원점을 지난다. 따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



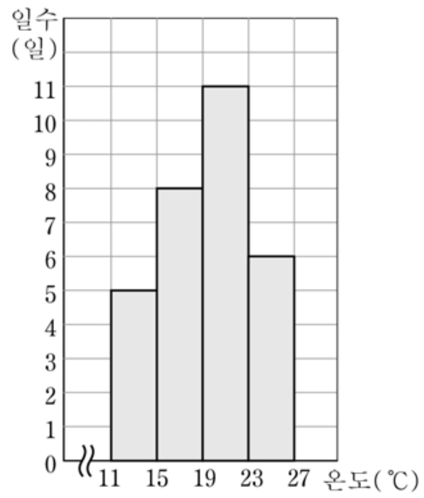
[다른 풀이]

$y=ax^2+bx$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하기 위해 $y=ax^2+bx$에 $y=0$을 대입하면
$ax^2+bx=x(ax+b)=0$
$x=0$ 또는 $x=-\dfrac{b}{a}$
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 $(0,0)$, $\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$을 지난다. 이때 $a<0,\ b>0$이므로 $-\dfrac{b}{a}>0$이다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 위로 볼록하고 원점과 x축의 양의 부분 위의 점을 지나므로 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 위의 그림과 같다.

[다른 풀이]

$y=ax^2+bx$
$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}$
에서 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이고
$a<0,\ b>0$이므로 $-\dfrac{b}{2a}>0$이다.
따라서 축은 y축의 오른쪽에 있다.
또 $a<0$이므로 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 위로 볼록하고 원점을 지난다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx$의 그래프는 위의 그림과 같다.

10. [출제의도] 히스토그램을 이해하여 자료의 평균을 구한다.



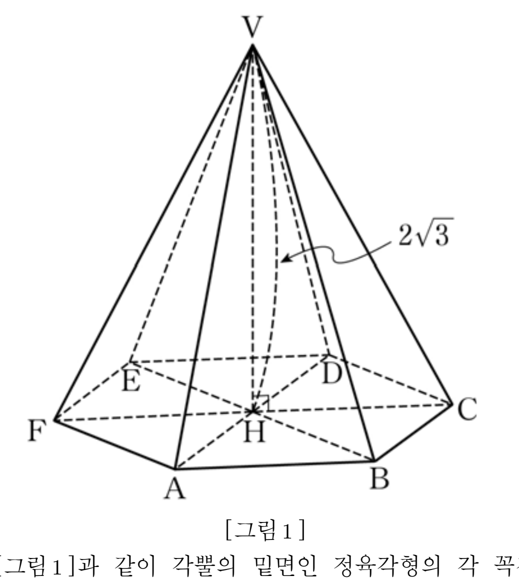
위의 히스토그램을 도수분포표로 만들면 다음과 같다.

최고 기온(℃)	도수
이상 미만 11 ~ 15	5
15 ~ 19	8
19 ~ 23	11
23 ~ 27	6
합계	30

표에서 11℃ 이상 15℃ 미만인 계급의 도수가 5이므로 이 계급에는 계급값이 13인 자료가 5개 있는 것으로 생각한다. 다른 계급에서도 마찬가지 방법으로 이 자료에는 계급값이 17인 자료가 8개, 계급값이 21인 자료가 11개, 계급값이 25인 자료가 6개 있는 것으로 생각한다. 따라서 이 지역의 4월 한 달 동안 일별 최고 기온의 평균은 다음과 같다.

$$\frac{(\text{계급값}\times\text{도수})\text{의 총합}}{\text{도수의 총합}}$$
$$=\frac{13\times5+17\times8+21\times11+25\times6}{30}$$
$$=\frac{582}{30}$$
$$=19.4\,(℃)$$

11. [출제의도] 입체도형의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

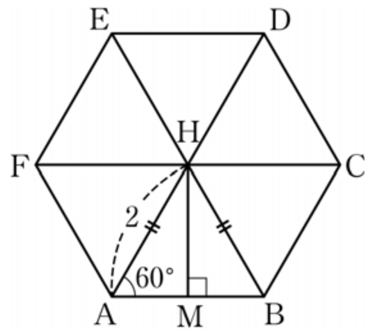


[그림1]

[그림1]과 같이 각뿔의 밑면인 정육각형의 각 꼭짓점을 차례로

A, B, C, D, E, F

라 하고, 나머지 꼭짓점을 V라 하자. 꼭짓점 V에서 각뿔의 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정육각형의 대각선의 교점이다. 각뿔의 옆면을 이루는 삼각형은 모두 합동이므로 삼각형 VAB는 $\overline{VA}=\overline{VB}$인 이등변삼각형이다.

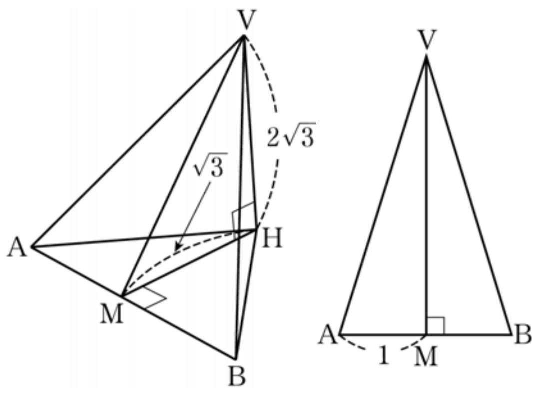


[그림2]

[그림2]에서 정육각형의 대각선에 의해 정육각형의 내부는 합동인 6개의 정삼각형으로 나뉜다. 그러므로 교점 H에 대하여 삼각형 HAB는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 선분 HA와 선분 HB의 길이는 2이다. 점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$\overline{AM}=1$, $\overline{HM}=\sqrt{3}$

이다.



[그림3]

[그림3]에서 삼각형 VMH는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{VM}^2=\overline{VH}^2+\overline{MH}^2$

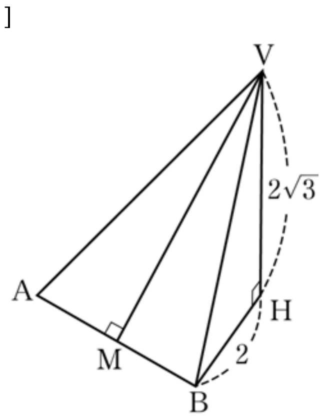
$=12+3=15$

따라서 $\overline{VM}=\sqrt{15}$

삼각형 VAB는 이등변삼각형이고 점 M이 선분 AB의 중점이므로 이등변삼각형의 성질에 의하여 두 선분 VM, AB는 수직이다. 따라서 이등변삼각형 VAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

[다른 풀이]



점 B는 정육각형의 한 꼭짓점이고 점 H는 정육각형의 대각선의 교점이다.

따라서 $\overline{BH}=2$

두 선분 VH, BH가 수직이므로 직각삼각형 VBH에서 피타고라스정리에 의하여

$\overline{VB}^2=\overline{VH}^2+\overline{BH}^2$

$=12+4=16$

따라서 $\overline{VB}=4$

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM}=1$이고, 이등변삼각형의 성질에 의하여 두 선분 VM, AB는 수직이다. 그림의 직각삼각형 VMB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{VM}^2=\overline{VB}^2-\overline{BM}^2$

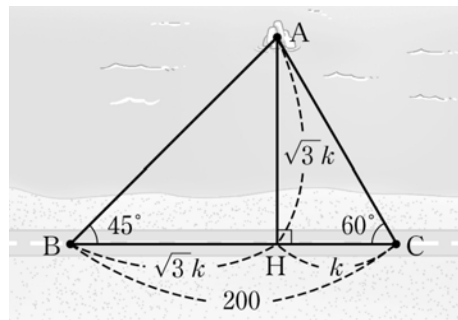
$=16-1=15$

따라서 $\overline{VM}=\sqrt{15}$

그러므로 이등변삼각형 VAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

12. [출제의도] 삼각비를 이해하여 삼각형에서 선분의 길이를 구한다.



$\overline{CH}=k$라 하면

직각삼각형 AHC에서

$\tan60°=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$

$\overline{AH}=\tan60°\times\overline{CH}$

$=\sqrt{3}k$ ⋯ ㉠

삼각형 ABH는 이등변삼각형이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}$

㉠에 의하여

$\overline{BH}=\overline{AH}=\sqrt{3}k$

$\overline{BC}=\overline{BH}+\overline{HC}$ 이므로

$\overline{BC}=200$에서

$\sqrt{3}k+k=(\sqrt{3}+1)k=200$

그러므로 $k=\frac{200}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{200(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=100(\sqrt{3}-1)$

따라서 구하는 선분 AH의 길이는

$\overline{AH}=\sqrt{3}k$

$=\sqrt{3}\times100(\sqrt{3}-1)$

$=100(3-\sqrt{3})\,(\mathrm{m})$

[다른 풀이]

$\overline{CH}=k$라 하면

$\overline{AH}=\tan60°\times\overline{CH}$

$=\sqrt{3}k$

$\overline{BH}=\overline{AH}=\sqrt{3}k$

$\triangle ABC=\triangle ABH+\triangle AHC$에서

$\frac{1}{2}\times200\times\sqrt{3}k$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}k\times\sqrt{3}k+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}k\times k$

$200\sqrt{3}k=3k^2+\sqrt{3}k^2$

$200\sqrt{3}k=\sqrt{3}(\sqrt{3}k^2+k^2)$

$200k=(\sqrt{3}+1)k^2$

$k>0$이므로

$k=\frac{200}{\sqrt{3}+1}$

$=100(\sqrt{3}-1)$

따라서 구하는 선분 AH의 길이는

$\overline{AH}=\sqrt{3}k$

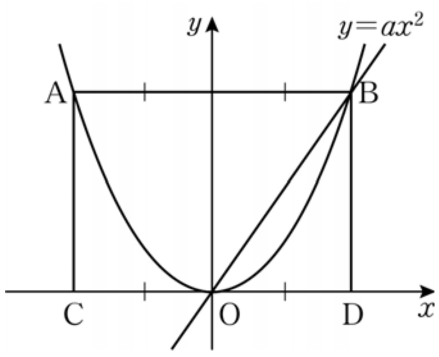
$=\sqrt{3}\times100(\sqrt{3}-1)$

$=100(3-\sqrt{3})\,(\mathrm{m})$

13. [출제의도] 두 선분의 길이의 비를 이용하여 직선의 기울기를 구한다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 원점을 꼭짓점으로 하고 y축에 대하여 대칭이므로 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ACDB의 변 AB는 y축에 의하여 이등분된다. 그러므로 원점 O는 변 CD를 이등분하는 점이다.

$\overline{CD}=2\overline{OD}$
이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$이고
$\overline{AB}:\overline{AC}=6:5$이므로
$\overline{AB}=\overline{CD}=6k$, $\overline{AC}=\overline{BD}=5k$라 하면
$\overline{OD}=3k$이다. (단, $k>0$)
따라서 직선 OB의 기울기는
$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OD}}=\dfrac{5k}{3k}=\dfrac{5}{3}$

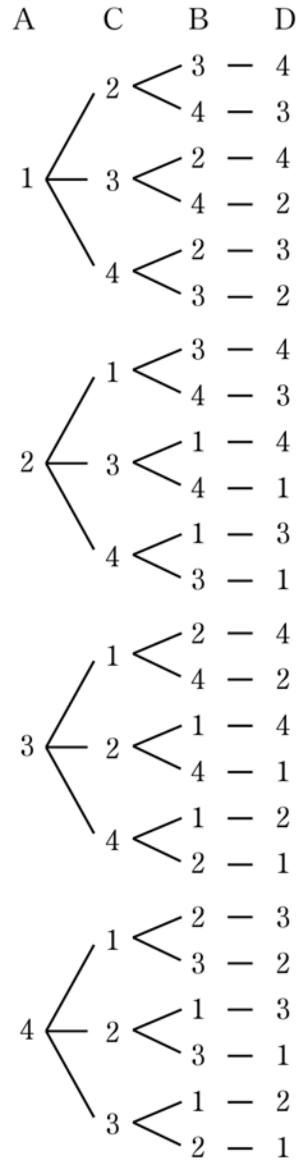


14. [출제의도] 평면도형과 이차함수의 성질을 이용하여 사각형의 넓이를 구한다.

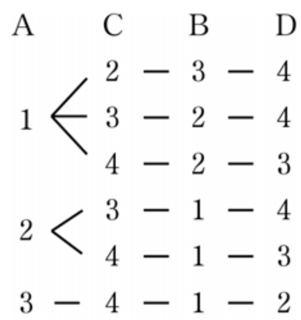
점 D의 x좌표를 $k\,(k>0)$라 하면, 점 B의 x좌표는 k이고 y좌표는 ak^2이다. 따라서 사각형 ACDB의 가로의 길이는 $2k$, 세로의 길이는 ak^2이므로 사각형 ACDB의 둘레의 길이는
$2(ak^2+2k)$
이다. 조건에 의해 $a=\dfrac{3}{2}$이고 사각형 ACDB의 둘레의 길이는 4이므로
$2\left(\dfrac{3}{2}k^2+2k\right)=4$
$3k^2+4k=4$
$3k^2+4k-4=0$
인수분해하면
$(3k-2)(k+2)=0$
$k=\dfrac{2}{3}$ 또는 $k=-2$
$k>0$이므로 $k=\dfrac{2}{3}$
따라서 사각형 ACDB의 넓이는
$$2k\times ak^2=\left(2\times\frac{2}{3}\right)\times\left\{\frac{3}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{8}{9}$$

15. [출제의도] 확률의 뜻을 이해하여 주어진 사건의 확률을 구한다.

네 책상 A, B, C, D에 카드를 놓는 경우의 수를 다음과 같이 그림을 이용하여 구할 수 있다.



위 그림을 통하여 알 수 있듯이 네 개의 책상에 카드를 하나씩 올려놓는 경우의 수는 24이다. 한편 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 크고, 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 큰 경우는 다음 6가지이다.

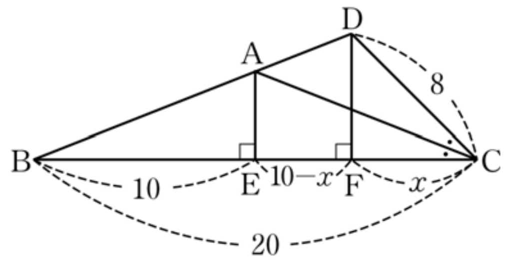


따라서 구하는 확률은 $\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$이다.

[다른 풀이]
책상에 카드를 놓는 경우의 수는
$4\times3\times2\times1=24$
이다. 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 크고, 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 큰 경우는 다음과 같다.
ⅰ) 책상 A에 1이 적힌 카드가 놓인 경우
책상 C에 놓을 수 있는 카드는 2, 3, 4가 적힌 카드가 모두 가능하므로 경우의 수는 3이다. 책상 C에 놓을 카드를 정하고 남은 카드 두 장을 책상 B와 D에 놓는 방법은 1가지이다. 그러므로 책상 A에 1이 적힌 카드를 놓는 경우의 수는 3이다.
ⅱ) 책상 A에 2가 적힌 카드가 놓인 경우
책상 C에 놓을 수 있는 카드는 3, 4가 적힌 카드가 가능하고, 책상 C에 놓을 카드를 정하고 남은 카드 두 장을 책상 B와 D에 놓는 방법은 1가지이므로 경우의 수는 2이다.
ⅲ) 책상 A에 3이 적힌 카드가 놓인 경우
책상 C에 놓을 수 있는 카드는 4가 적힌 카드 하나이므로 경우의 수는 1이다. 책상 C에 놓을 카드를 정하고 남은 카드 두 장을 책상 B와 D에 놓는 방법은 1가지이므로 경우의 수는 1이다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 크고, 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 큰 경우의 수는
$3+2+1=6$
이다. 따라서 구하는 확률은
$\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$
이다.

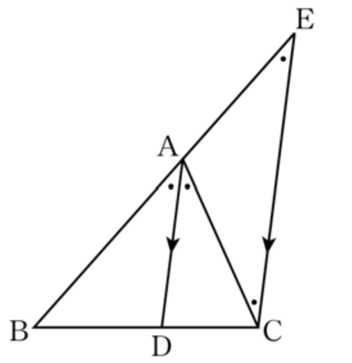
[다른 풀이]
1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드를 네 개의 책상에 임의로 놓을 경우 책상 C에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 A에 놓인 카드에 적힌 수보다 클 확률은 $\dfrac{1}{2}$이다. 또한 책상 D에 놓인 카드에 적힌 수가 책상 B에 놓인 카드에 적힌 수보다 클 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 확률은
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$
이다.

16. [출제의도] 삼각형의 닮음을 이해하고 이를 이용하여 선분의 길이를 구한다.



삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로
점 E는 선분 BC의 중점이다.
$\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times20=\boxed{10}$
삼각형 CDB에서
$\angle ACB=\angle ACD$이므로
$\overline{BA}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DC}=20:8$, 즉
$\overline{BA}:\overline{AD}=5:\boxed{2}$
이다. 두 선분 AE와 DF는 평행하므로
$\overline{BA}:\overline{AD}=\overline{BE}:\overline{EF}$
이다.
$\overline{FC}=x$라 하면
$5:2=10:10-x$
이다. 이 식을 정리하면
$10-x=4$
$x=6$
따라서 $\overline{FC}=\boxed{6}$
이다. 그러므로 구하는 값은
$a=10,\ b=2,\ c=6$
$a+b+c=18$

[참고]
삼각형에서 각의 이등분선의 성질에 대해 살펴보자.



위 그림의 삼각형 ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. 점 C 를 지나고 $\overline{AD}$ 에 평행한 직선이 $\overline{AB}$ 의 연장선과 만나는 점을 E 라 하자.

$\angle BAD = \angle BEC$

$\angle B$ 는 공통이므로

$\triangle BDA \backsim \triangle BCE$ (AA 닮음)

따라서 닮음의 성질에 의해

$\overline{BA} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{DC}$ $\cdots$ ㉠

두 직선 AD, EC 가 평행하므로

$\angle CAD = \angle ECA$

$\angle BAD = \angle AEC$

따라서 $\angle AEC = \angle ACE$

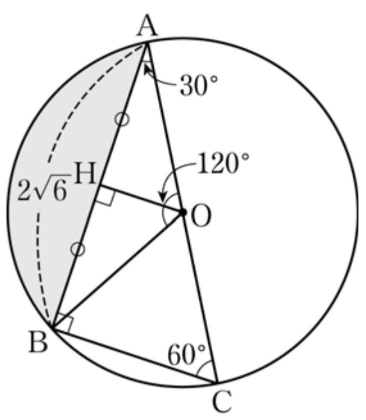
삼각형 ACE 는 이등변삼각형이므로

$\overline{AE} = \overline{AC}$

그러므로 ㉠에 의해

$\overline{BA} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

17. **[출제의도] 삼각비와 원의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.**



조건 (가)에서 선분 AC 는 원의 지름이므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle ABC = 90°$

따라서

$\angle CAB = 90° - \angle ACB$

$= 90° - 60° = 30°$

원의 중심을 O 라 하자. 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H 라 하면 원의 성질에 의하여

$\overline{AH} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \sqrt{6}$

직각삼각형 OAH에서 $\cos 30° = \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}}$ 이므로

$\overline{OA} = \frac{\overline{AH}}{\cos 30°}$

$= \sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= 2\sqrt{2}$

따라서 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 넓이는 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$, 중심각의 크기가 $120°$ 인 부채꼴의 넓이에서 삼각형 OAB 의 넓이를 빼면 된다.

반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$, 중심각의 크기가 $120°$ 인 부채꼴의 넓이는

$\pi(2\sqrt{2})^2 \times \frac{120}{360} = \frac{8}{3}\pi$

직각삼각형 AHO 에서

$\overline{OH} = \overline{AH} \tan 30°$

$= \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$

삼각형 OAB 의 넓이는

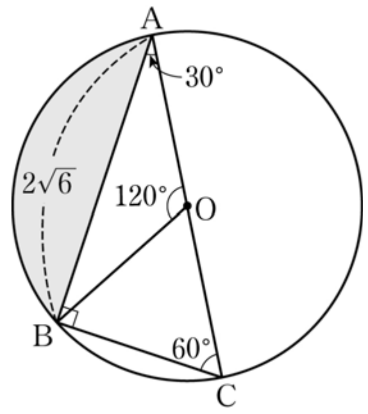
$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{2}$

$= 2\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

[다른 풀이]



원의 중심을 O 라 하자. 선분 AC 는 원의 지름이므로 선분 AC 의 중점은 원의 중심 O 이다.

또 $\angle ABC$ 는 지름의 원주각이므로

$\angle ABC = 90°$

직각삼각형 ABC 에서

$\sin 60° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 에 $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$ 을 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{\overline{AC}}$

$\overline{AC} = 4\sqrt{2}$

$\overline{OA} = \overline{OB} = 2\sqrt{2}$

삼각형 OBC가 정삼각형이므로

$\angle BOC = 60°$ 에서 $\angle AOB = 120°$

삼각형 OAB 의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin(180° - 120°)$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2\sqrt{3}$

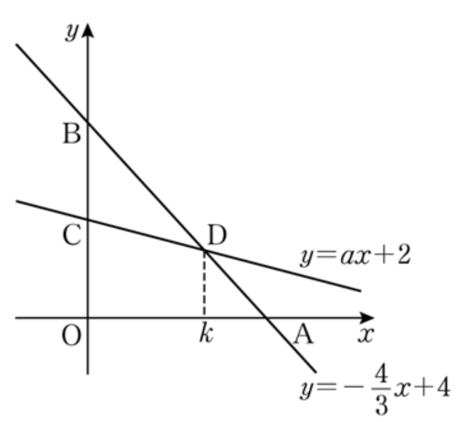
한편, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$, 중심각의 크기가 $120°$ 인 부채꼴의 넓이는

$\pi(2\sqrt{2})^2 \times \frac{120}{360} = \frac{8}{3}\pi$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

18. **[출제의도] 삼각형의 넓이와 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 직선의 기울기를 구한다.**



점 A 는 일차함수 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 의 그래프와 x축이 만나는 점이므로

$0 = -\frac{4}{3}x + 4$

$x = 3$ 에서 A$(3, 0)$

점 B 는 일차함수 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 의 그래프와 y축이 만나는 점이므로 B$(0, 4)$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

삼각형 BCD 의 넓이를 S_1, 사각형 COAD 의 넓이를 S_2 라 하면

$S_1 : S_2 = 1 : 2$ 이므로 $S_2 = 2S_1$

$S_1 + S_2 = 3S_1 = 6$ 에서 $S_1 = 2$

점 C 는 일차함수 $y = ax + 2$ 의 그래프와 y축이 만나는 점이므로 C$(0, 2)$

따라서 $\overline{BC} = 2$

점 D 의 x좌표를 k 라 하면

$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times k = 2$, $k = 2$

점 D 는 직선 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 위의 점이므로

$x = 2$ 를 대입하면 점 D 의 y좌표는

$-\frac{4}{3} \times 2 + 4 = \frac{4}{3}$ 이므로 D$\left(2, \frac{4}{3}\right)$

또, 점 D$\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 는 직선 $y = ax + 2$ 위의 점이므로

$\frac{4}{3} = 2a + 2$ 에서 $2a = -\frac{2}{3}$

따라서 $a = -\frac{1}{3}$

[다른 풀이]

A$(3, 0)$, B$(0, 4)$, C$(0, 2)$ 에서 $\overline{BC} = 2$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

삼각형 BCD 의 넓이를 S_1, 사각형 COAD 의 넓이를 S_2 라 하면

$S_1 : S_2 = 1 : 2$ 에서 $S_2 = 2S_1$

$\triangle ABC = S_1 + S_2 = 3S_1 = 6$

따라서 $S_1 = 2$

점 D 의 x좌표를 k 라 하면

$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times k = 2$ 에서 $k = 2$

점 D 는 직선 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 위의 점이므로

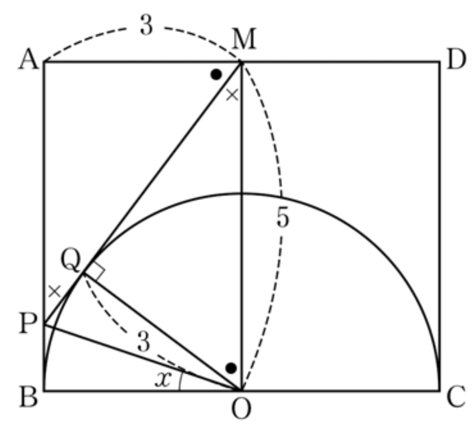
$x = 2$ 를 대입하면 점 D 의 y좌표는

$-\frac{4}{3} \times 2 + 4 = \frac{4}{3}$ 에서 D$\left(2, \frac{4}{3}\right)$

한편, a 는 두 점 C$(0, 2)$, D$\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 를 지나는 직선의 기울기이므로

$a = \left(\frac{4}{3} - 2\right) \div (2 - 0) = -\frac{1}{3}$

19. **[출제의도] 피타고라스 정리와 원의 성질을 이용하여 삼각비의 값을 구한다.**



점 M에서 반원에 그은 접선이 반원과 접하는 점을 Q 라 하자. 원과 접선의 성질에 의하여 두 선분 MQ 와 OQ 는 서로 수직이고, $\overline{OQ} = 3$ 이다.

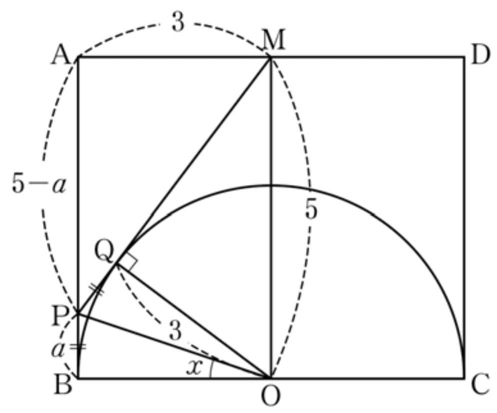
직각삼각형 QOM에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{QM}^2 = \overline{MO}^2 - \overline{QO}^2$

$= 5^2 - 3^2 = 16$

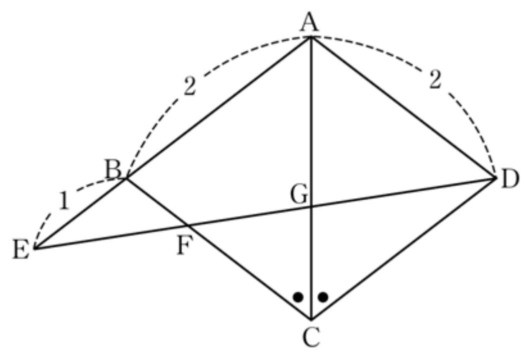
따라서 $\overline{QM}=4$이다.
$\overline{AB}//\overline{MO}$이므로 엇각의 성질에 의하여
$\angle APM=\angle QMO$ ⋯ ①
$\angle AMO=90°$이므로
$\angle AMP+\angle QMO=90°$ ⋯ ㉠
직각삼각형 QOM에서
$\angle QMO+\angle QOM=90°$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $\angle AMP=\angle QOM$ ⋯ ②
$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AD}=3$이므로 $\overline{AM}=\overline{QO}$ ⋯ ③
①, ②, ③에 의하여 삼각형 APM과 삼각형 QMO는 합동이므로
$\overline{AP}=\overline{QM}=4$
따라서 $\overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}$
$=5-4=1$
직각삼각형 PBO에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{OP}^2=\overline{PB}^2+\overline{BO}^2$
$=1^2+3^2=10$
이므로 $\overline{OP}=\sqrt{10}$이다.
따라서 $\sin x=\frac{\overline{PB}}{\overline{OP}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

[다른 풀이]



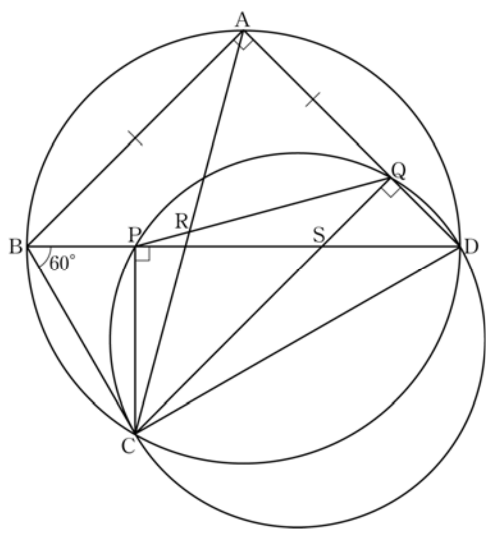
$\overline{PB}=a$라 하자.
원과 접선의 성질에 의하여
$\overline{PQ}=\overline{PB}=a$, $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=5-a$
직각삼각형 MQO에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{QM}^2=\overline{MO}^2-\overline{QO}^2$
$=5^2-3^2=16$
$\overline{QM}=4$
따라서 $\overline{PM}=\overline{PQ}+\overline{QM}=a+4$
직각삼각형 APM에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PM}^2=\overline{AP}^2+\overline{AM}^2$
$(a+4)^2=(5-a)^2+3^2$
$a^2+8a+16=(a^2-10a+25)+9$
$18a=18$, $a=1$
직각삼각형 PBO에서 $\overline{PB}=1$이고 $\overline{BO}=3$이므로 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PO}^2=\overline{PB}^2+\overline{BO}^2=1^2+3^2=10$
$\overline{PO}=\sqrt{10}$
따라서 $\sin x=\frac{\overline{PB}}{\overline{OP}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

20. **[출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 성립하는 내용을 추론한다.**



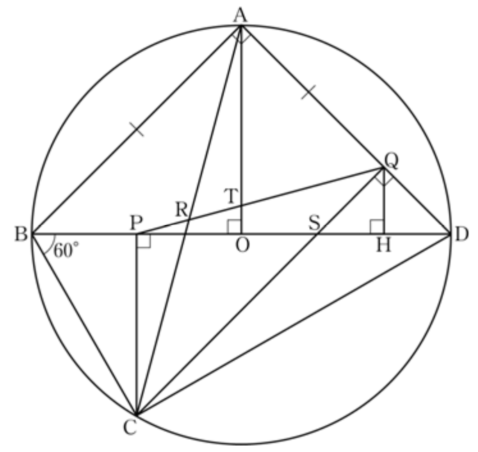
ㄱ. 두 삼각형 EBF와 EAD에서 두 선분 BF와 AD가 평행하므로
$\angle EBF=\angle EAD$, $\angle EFB=\angle EDA$
따라서 $\triangle EBF \backsim \triangle EAD$
$\overline{BF}:\overline{AD}=\overline{EB}:\overline{EA}=1:3$ (참)
ㄴ. ㄱ에서 $\overline{BF}:\overline{AD}=1:3$이므로
$\overline{BF}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}$
$\overline{FC}=\overline{BC}-\overline{BF}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
삼각형 CFD에서
선분 CG는 각 FCD의 이등분선이므로
$\overline{FG}:\overline{GD}=\overline{CF}:\overline{CD}=\frac{4}{3}:2=2:3$ (거짓)
ㄷ. $\triangle GFC=a$라 하자. 두 선분 FC와 AD가 평행하므로 $\angle FCG=\angle DAG$, $\angle CFG=\angle ADG$
따라서 $\triangle GFC \backsim \triangle GDA$
$\overline{FC}:\overline{AD}=2:3$이므로
$\triangle GFC:\triangle GDA=4:9$
$\triangle GDA=\frac{9}{4}a$ ⋯ ㉠
두 삼각형 CFG와 CDG의 높이는 서로 같고 ㄴ에서 $\overline{FG}:\overline{GD}=2:3$이므로
$\triangle CFG:\triangle CGD=2:3$
$\triangle CGD=\frac{3}{2}a$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$\triangle ACD=\triangle GDA+\triangle CGD=\frac{9}{4}a+\frac{3}{2}a=\frac{15}{4}a$
따라서 $\triangle GFC:\triangle ACD=a:\frac{15}{4}a=4:15$ (참)

21. **[출제의도] 원의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.**



$\angle CBD$와 $\angle CAD$는 호 CD의 원주각이므로 원주각의 성질에 의하여
$\angle CAD=60°$
이다. 사각형 ABCD는 원에 내접하므로
$\angle C=90°$, $\angle BDC=30°$
이다. 한편
$\angle CPD=\angle CQD=90°$
이므로 지름의 원주각의 성질에 의하여 사각형 PCDQ는 선분 CD를 지름으로 하는 원에 내접하는 사각형이다. 이때 $\angle PDC$와 $\angle PQC$는 이 원에서 호 PC의 원주각이므로
$\angle PDC=\angle PQC=30°$, $\angle AQR=60°$
그러므로 삼각형 ARQ는 정삼각형이고
$\overline{AQ}=\overline{QR}$
삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이고 변 BD의 길이는 8이므로
$\overline{AD}=4\sqrt{2}$
따라서 선분 QD의 길이를 구하면 선분 QR의 길이를 구할 수 있다. 선분 CD를 지름으로 하는 원에서 원주각의 성질에 의하여
$\angle PCQ=\angle PDQ=45°$
두 삼각형 PCS와 SDQ는 직각이등변삼각형이다.
$\overline{PC}=\overline{PS}=2\sqrt{3}$
$\overline{SD}=8-(2+2\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}$
$\overline{QD}=\frac{1}{\sqrt{2}}(6-2\sqrt{3})=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$
따라서
$\overline{QR}=\overline{AQ}=4\sqrt{2}-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

[다른 풀이]



원의 중심을 O라 하자. $\angle A=90°$이므로 $\overline{BD}$는 원의 지름이고 $\angle C=90°$이다. 점 Q에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 두 선분 BD, CQ가 만나는 점을 S라 하고 두 선분 PQ, AO가 만나는 점을 T라 하자. 직각삼각형 BCD에서
$\overline{BD}=8$이므로 $\overline{BC}=4$
직각삼각형 BCP에서
$\overline{BC}=4$이므로 $\overline{BP}=2$
$\overline{PO}=2$이고, 삼각형 PCS는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{PS}=\overline{PC}=2\sqrt{3}$
$\overline{QH}=\frac{1}{2}\overline{SD}=3-\sqrt{3}$
$\overline{PH}=2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$
직각삼각형 PHQ에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PQ}^2=\overline{PH}^2+\overline{QH}^2$
$=(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2=24$
따라서 $\overline{PQ}=2\sqrt{6}$
삼각형 POT와 삼각형 PHQ가 서로 닮음이므로
$\overline{PO}:\overline{PH}=\overline{PT}:\overline{PQ}$에서
$\overline{PT}=\frac{\overline{PO}\times\overline{PQ}}{\overline{PH}}$
$=\frac{2\times2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$\overline{PO}:\overline{PH}=\overline{TO}:\overline{QH}$에서
$\overline{TO}=\frac{\overline{PO}\times\overline{QH}}{\overline{PH}}$
$=\frac{2\times(3-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$
$\overline{AT}=\overline{AO}-\overline{TO}=2\sqrt{3}$
$\overline{AT}=\overline{CP}$이므로 $\triangle CRP\equiv\triangle ART$
$\overline{PR}=\overline{TR}$
$\overline{PR}=\frac{1}{2}\overline{PT}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$
따라서
$\overline{QR}=\overline{PQ}-\overline{PR}$
$=2\sqrt{6}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

22. **[출제의도] 분모의 유리화를 이용하여 근호를 포함한 식을 계산한다.**
곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 x의 분모를 유리화하면
$x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$
$=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
$=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$

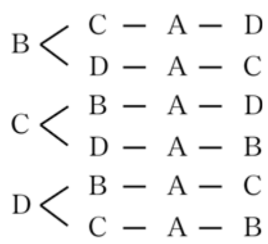
$=2-\sqrt{3}$
따라서
$x+y=(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}=2$

23. [출제의도] 부등식의 성질을 이용하여 일차부등식을 만족하는 정수의 개수를 구한다.

$3(x-2)<2x$에서
$3x-6<2x$
$3x-2x<6$
$x<6$
그러므로 구하는 양의 정수 x는
1, 2, 3, 4, 5로 개수는 5이다.

24. [출제의도] 경우의 수를 이해하고 이를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A는 셋째 날 식사 당번을 해야 하므로 식사 당번을 정하는 순서를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

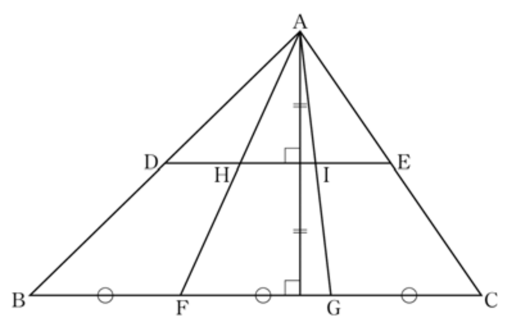


따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

[다른 풀이]

조건에 따라 학생 네 명이 모두 4일 동안 하루에 한 명씩 식사 당번을 하도록 순서를 정할 때, A가 셋째 날 당번으로 정해졌으므로 나머지 3일 동안 B, C, D 학생 세 명이 하루에 한 명씩 식사 당번을 하면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는
$3\times2\times1=6$

25. [출제의도] 닮음비를 이해하여 주어진 삼각형의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자.
삼각형 AFG의 높이는 삼각형 ABC의 높이와 같고 삼각형 AFG의 밑변의 길이는 삼각형 ABC의 밑변의 길이의 $\frac{1}{3}$이므로

(삼각형 AFG의 넓이)$=\frac{1}{3}S$

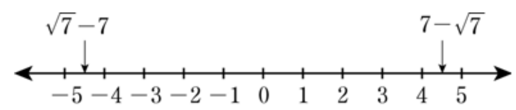
이다. 점 D, E가 각각 선분 AB, AC의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{HI}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FG}}$

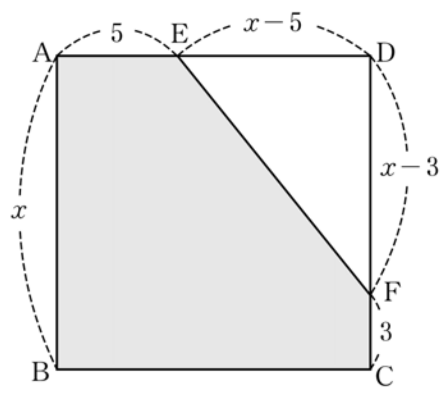
$\triangle\mathrm{AHI}\backsim\triangle\mathrm{AFG}$이고 닮음비가 $1:2$이므로 넓이의 비는 $1:4$이다.
(삼각형 AFG의 넓이)
=(삼각형 AHI의 넓이)+(사각형 HFGI의 넓이)
(사각형 HFGI의 넓이)
$=\frac{3}{4}\times$(삼각형 AFG의 넓이)
이므로
(사각형 HFGI의 넓이)$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}S=\frac{1}{4}S$
따라서 사각형 HFGI의 넓이가 3이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는 12이다.

26. [출제의도] 무리수의 값을 추측하여 조건에 맞는 정수의 개수를 구한다.

$\sqrt{7}-7=-(7-\sqrt{7})$이므로 $\sqrt{7}-7$과 0 사이에 있는 정수의 개수와 0과 $7-\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수의 개수는 같다.
$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{7}<3$
부등식의 성질에 의하여
$-3<-\sqrt{7}<-2$
$7-3<7-\sqrt{7}<7-2$
$4<7-\sqrt{7}<5$
그러므로 0과 $7-\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수는
1, 2, 3, 4
이다. 따라서 두 수 $\sqrt{7}-7$과 $7-\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수는
-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4
이므로 구하는 정수의 개수는 9이다.

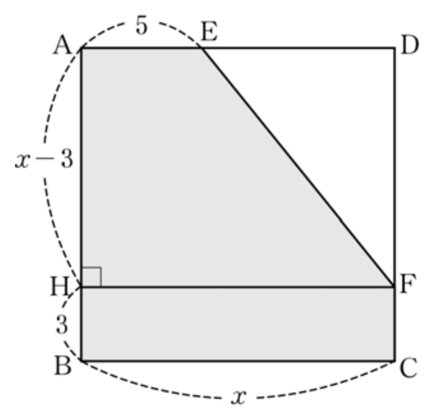


27. [출제의도] 이차방정식을 활용하여 사각형의 넓이를 구한다.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $x\,(x>0)$라 하면
$\overline{\mathrm{ED}}=x-5$, $\overline{\mathrm{DF}}=x-3$
정사각형 ABCD의 넓이는 x^2이고, 삼각형 EFD의 넓이는
$\frac{1}{2}(x-5)(x-3)=\frac{1}{2}(x^2-8x+15)$
오각형 ABCFE의 넓이가 129이므로
$x^2-\frac{1}{2}(x^2-8x+15)=129$
$\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{15}{2}=129$
등식의 양변에 2를 곱하면
$x^2+8x-15=258$
$x^2+8x-273=0$
$(x+21)(x-13)=0$
$x=-21$ 또는 $x=13$
$x>0$이므로 $x=13$
따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $169\,\mathrm{m}^2$이므로
$a=169$

[다른 풀이]



점 F에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 두 점 F, H를 연결하는 선분에 의해 오각형 ABCFE는 사다리꼴 AHFE와 직사각형 HBCF로 나누어진다.
정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $x\,(x>0)$라 하자.
사다리꼴 AHFE의 넓이는
$\frac{1}{2}(x+5)(x-3)=\frac{1}{2}(x^2+2x-15)$
직사각형 HBCF의 넓이는 $3x$이고 오각형 ABCFE의 넓이가 129이므로
$\frac{1}{2}(x^2+2x-15)+3x=129$
$\frac{1}{2}x^2+x-\frac{15}{2}+3x=129$
$\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{15}{2}=129$
등식의 양변에 2를 곱하면
$x^2+8x-15=258$
$x^2+8x-273=0$
$(x+21)(x-13)=0$
$x=-21$ 또는 $x=13$
$x>0$이므로 $x=13$
따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 $169\,\mathrm{m}^2$이므로
$a=169$

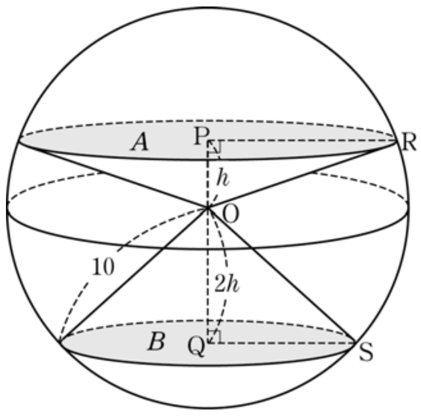
28. [출제의도] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

이날 판매된 상품 A의 개수 a, 상품 B의 개수 b에 대하여 할인가로 판매한 매출액이 340000원이므로
$5000a+2000b=340000$
$5a+2b=340$ ⋯ ㉠
정가로 판매했을 때의 매출액은 할인가로 판매했을 때의 매출액보다 140000원 많은 금액이므로
$6000a+4000b=340000+140000=480000$
$3a+2b=240$ ⋯ ㉡
㉠ − ㉡ 하면
$2a=100$, $a=50$
이를 ㉡에 대입하면 $b=45$
따라서 $a+b=50+45=95$

29. [출제의도] 대푯값을 이해하여 자료를 추측하고 자료의 분산을 구한다.

조건 (가)에서 가장 작은 수는 7이고, 가장 큰 수는 14이므로 5개의 수를 7, a, b, c, 14라 하자.
조건 (나)에서 최빈값이 8이므로 a, b, c 중에서 적어도 2개의 값은 8이 되어야 한다.
ⅰ) $a=b=c=8$일 때
5개의 수는 7, 8, 8, 8, 14
이고, 이 자료의 평균은
$\frac{7+8+8+8+14}{5}=9$
가 되어 조건에 맞지 않는다.
ⅱ) $a=8$, $b=8$일 때
5개의 수는 7, 8, 8, c, 14
이고, 이 자료의 평균은 10이므로
$\frac{7+8+8+c+14}{5}=10$
$\frac{37+c}{5}=10$, $c=13$
ⅰ), ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 자료의 값은
7, 8, 8, 13, 14
이고, 각각의 편차는
-3, -2, -2, 3, 4
이다. 분산은 편차의 제곱의 평균이므로
$d=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-2)^2+3^2+4^2}{5}=\frac{42}{5}$
따라서 $20d=20\times\frac{42}{5}=4\times42=168$

30. [출제의도] 입체도형의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 문제를 해결한다.



구의 중심 O를 지나고 두 단면 A, B에 수직인 직선이 두 단면 A, B와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.
조건에 의하여
$\overline{OP} : \overline{OQ} = 1 : 2$
$\overline{OP} = h$라 하면 $\overline{OQ} = 2h$
단면 A와 구가 만나는 점 중 하나를 R, 단면 B와 구가 만나는 점 중 하나를 S라 하자. 두 단면 A, B는 서로 평행이고, 두 선분 OP, OQ가 두 단면 A, B와 수직이므로 두 삼각형 OPR, OQS는 모두 직각삼각형이다. 피타고라스 정리에 의하여
삼각형 OPR에서
$$\begin{aligned}\overline{PR}^2 &= \overline{OR}^2 - \overline{OP}^2\\ &= 100^2 - h^2\end{aligned}$$
삼각형 OQS에서
$$\begin{aligned}\overline{QS}^2 &= \overline{OS}^2 - \overline{OQ}^2\\ &= 100 - (2h)^2\\ &= 100 - 4h^2\end{aligned}$$
따라서 단면 A의 넓이는
$\pi(100 - h^2)$
단면 B의 넓이는
$\pi(100 - 4h^2)$
두 원뿔의 밑면의 넓이의 비가 $41 : 14$이므로
$\pi(100 - h^2) : \pi(100 - 4h^2) = 41 : 14$
$41(100 - 4h^2) = 14(100 - h^2)$
$150h^2 = 2700$
$h^2 = 18$
$h = 3\sqrt{2}$
단면 A를 밑면으로 하는 원뿔의 부피는
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}h(100 - h^2)\pi &= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times (100 - 18)\pi\\ &= 82\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$
단면 B를 밑면으로 하는 원뿔의 부피는
$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \times 2h(100 - 4h^2)\pi &= \frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} \times (100 - 72)\pi\\ &= 56\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$
그러므로 두 원뿔의 부피의 합은
$82\sqrt{2}\pi + 56\sqrt{2}\pi = 138\sqrt{2}\pi$
따라서 $k = 138$