2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'A'형 정답

1	③	2	④	3	①	4	⑤	5	⑤
6	①	7	①	8	⑤	9	②	10	④
11	②	12	③	13	③	14	⑤	15	④
16	③	17	②	18	④	19	③	20	①
21	②	22	64	23	200	24	8	25	137
26	18	27	17	28	43	29	9	30	44

해 설

1. **[출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.**

$\sqrt{2}\times 8^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=4$

2. **[출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 두 행렬의 곱을 계산한다.**

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은 $2+1+4+3=10$

3. **[출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=0$$

4. **[출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 구한다.**

각 점에 연결된 변의 개수가 1인 점이 6개, 2인 점이 6개, 3인 점이 5개, 5인 점이 1개

따라서 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 5

5. **[출제의도] 등비수열의 성질을 이해하고 일반항을 구한다.**

$a_2=2$, $a_3=4$이므로 공비는 2 $\therefore a_5=16$

6. **[출제의도] 조건부 확률의 성질을 이해하고 주어진 값을 구한다.**

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$

7. **[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미정계수를 구한다.**

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2+a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(2+a)$$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$에서 $a=10$

8. **[출제의도] 확률분포를 이해하고 기댓값을 구한다.**

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=k(1+2+3)=6k=1$ $\therefore k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=k+4k+9k=14k=\frac{14}{6}$

$\mathrm{E}(6X+1)=6\mathrm{E}(X)+1=6\times\frac{14}{6}+1=15$

9. **[출제의도] 함수의 극한을 이해하고 조건을 만족하는 값을 구한다.**

$\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=2+0=2$

10. **[출제의도] 적분의 성질을 이해하고 넓이를 구한다.**

$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$, $x=0$ 또는 2

따라서 $\int_0^2\left|x^3-2x^2+k-k\right|dx$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

11. **[출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.**

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le 148.9)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.9224$

12. **[출제의도] 함수의 연속의 성질을 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.**

함수 $f(t)=\begin{cases}2 & (|t|>1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 0 & (|t|<1)\end{cases}$이고 함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이다.

$(1+k)f(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+k)f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+k)f(x)$

$1+k=(1+k)\times 0=(1+k)\times 2$

따라서 $k=-1$이므로 $f(1)+k=1-1=0$

13. **[출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계를 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.**

$\begin{pmatrix}f(k)+1 & k\\ k^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 $f(k)+1-k^3=0$

$k^3+6k^2+8k+1-k^3=6k^2+8k+1=0$

따라서 k의 값의 합은 $-\frac{4}{3}$

14. **[출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 주어진 문제를 해결한다.**

$g'(x)=f(x)=0$을 만족하는 x를 구하면

$x(x+2)(x+4)=0$에서 $x=-4$, -2, 0이므로

$x=-2$에서 $g(x)$는 극댓값을 갖는다. $\therefore\alpha=-2$

$$g(\alpha)=\int_2^{-2}f(t)dt=\int_2^{-2}(t^3+6t^2+8t)\,dt$$
$$=-2\int_0^2 6t^2dt=-2\left[2t^3\right]_0^2=-32$$

15. **[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 관련된 외적 문제를 해결한다.**

30분 후 농도가 2 ng/mL이므로

$\log(10-2)=1-30k$, $k=\frac{1}{30}\log\left(\frac{5}{4}\right)$

60분 후 농도가 a이므로 $\log(10-a)=1-60k$

$\log(10-a)=1-2\log\left(\frac{5}{4}\right)=\log\left(\frac{32}{5}\right)$

따라서 $a=\frac{18}{5}=3.6$

16. **[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론한다.**

$n=2m-1$을 대입하면 $\frac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}}=\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

그러므로 (가)는 $\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

$m-1$개의 식을 곱하여 정리하면

$$\frac{a_{2m+1}}{a_1}=\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(2m-1)^2}{2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2m+1)}$$

$$a_{2m+1}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2m-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2m}\times\frac{1}{2m+1}$$

그러므로 (나)는 $\frac{1}{2m+1}$

따라서 $f(5)\times g(4)=\frac{9}{110}$

17. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 x좌표를 추론한다.**

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(2^a,\ a)$이고 $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$, $2(2^a-a)^2=288$, $2^a-a=12$ ⋯ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=2^a-a=12$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=14$이다.

그러므로 $2^a-\log_2 a=14$ ⋯ ㉡

㉡-㉠으로부터 $a-\log_2 a=2$

18. **[출제의도] 수열의 정의를 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.**

$a_m=1$이므로 $m=2^1\times q$ (q는 홀수)

$2m=2^2\times q$이므로 $a_{2m}=2$

⋮

따라서 $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{10m}$

$=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2=18$

19. **[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 행렬의 참, 거짓을 추론한다.**

ㄱ. $B=2E-A$에서 $AB=A(2E-A)=2A-A^2$

$BA=(2E-A)A=2A-A^2$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A=2E-B$를 $B^2+2AB+5A=4E$에 대입하여 정리하면 $B^2+B=6E$

$\therefore B^{-1}=\frac{1}{6}(B+E)$ (참)

ㄷ. $BA^2+AB^2=AB(A+B)=2AB$

$2AB=-B^2-5A+4E$

$=-6E+B-5(2E-B)+4E=6B-12E$

B는 역행렬이 존재하므로 영행렬이 아니다.

$\therefore 2AB\neq -12E$ (거짓)

20. **[출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.**

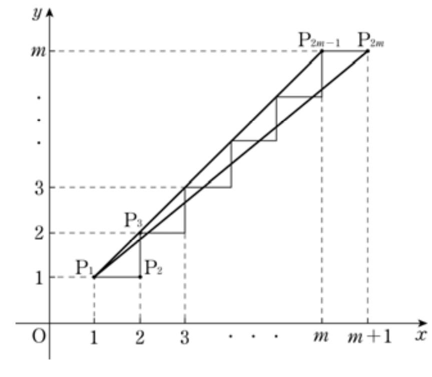
점 A_2를 지나고 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에 평행한 직선과 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$의 교점을 각각 P, Q라 하자.

두 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{PQ}$의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{PQ}$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$과 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi\quad\therefore\ \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

21. **[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 수열의 극한을 구하는 문제를 해결한다.**



$a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\sqrt{2^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$,

$\cdots$, $a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$,

$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$

ⅰ) $n=2m-1$ (m 은 자연수)일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})$

$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2(m-1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ⅱ) $n=2m$ (m 은 자연수)일 때,

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})$

$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. [출제의도] 함수의 극한값을 계산한다.

$\lim_{x\to1}\frac{(x+7)^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+7)^2=64$

23. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx=\int_0^{10}4x\,dx=200$

24. [출제의도] 조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다. 7개의 공을 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_{2+7-1}\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_7=8$

25. [출제의도] 수열의 성질을 이해하여 값을 구한다.

$a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=27$, $a_{13}=\frac{a_{12}+a_{14}}{2}=127$

공차를 d라 하면 $a_{13}=a_3+(11-1)d$에서 $d=10$

따라서 $a_{14}=a_{13}+d=137$

26. [출제의도] 이항분포를 이해하여 n을 구한다.

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=18$에서 $\mathrm{E}(X)=np=6$ ⋯ ㉠

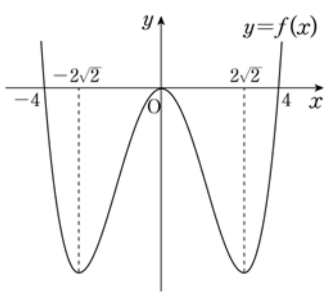
$\mathrm{E}(3X^2)=3\mathrm{E}(X^2)=120$이므로 $\mathrm{E}(X^2)=40$

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$6(1-p)=40-6^2=4$이므로 $p=\frac{1}{3}$

따라서 ㉠에 대입하면 $n=18$

27. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x)=4x(x^2-8)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$

(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.

그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4, -5, ⋯

(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$이므로

$k=1$ 또는 -4

따라서 $1^2+(-4)^2=17$

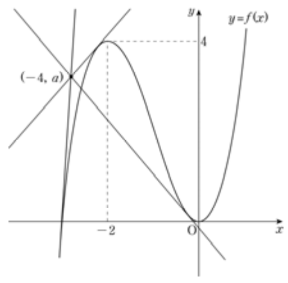
28. [출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 주어진 규칙에 따라 문제를 해결한다.

$a=6$이고 $0\le b\le 6$이므로 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 $b=0$, 3, 6

${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$=\frac{1}{64}+\frac{20}{64}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$ $\therefore p+q=43$

29. [출제의도] 세 개의 접선이 존재할 수 있는 점의 범위를 찾는 문제를 해결한다.



함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다. 세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.

$0<a<4$이므로 정수 a의 최댓값 M은 3이다.

따라서 $M^2=9$

30. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.

$(n+1)\log a=3n^2-4n+4$이므로

$\log a=3n-7+\frac{11}{n+1}$ ⋯ ㉠

(가)에서 $2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=$(정수)이므로 ㉠의 양변에 $(2n-1)$을 곱하면

$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\frac{11(2n-1)}{n+1}$

$=(2n-1)(3n-7)+22-\frac{33}{n+1}$

$\frac{33}{n+1}$이 정수이고 n은 자연수이므로 $n+1$은 3, 11, 33

따라서 n의 값의 합은 $2+10+32=44$