2015학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나 형]

1	④	**2**	①	**3**	③	**4**	②	**5**	⑤
6	④	**7**	②	**8**	⑤	**9**	③	**10**	④
11	①	**12**	①	**13**	⑤	**14**	②	**15**	①
16	④	**17**	⑤	**18**	③	**19**	③	**20**	③
21	②	**22**	45	**23**	15	**24**	20	**25**	9
26	8	**27**	216	**28**	26	**29**	300	**30**	30

1. [출제의도] 집합의 연산을 활용하여 계산하기

$A\cup B=\{1,2,3,4\}$이므로 모든 원소의 합은 10

2. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산하기

$\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=1$

3. [가형 2번과 동일]

4. [출제의도] 등비중항 이해하기

$a_2\times a_4=(a_3)^2=64$

모든 항이 양수이므로 $a_3=8$

5. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

유리함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+a$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=3$이므로

$a=3$, $b=-2$

$\therefore\ a-b=5$

6. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\displaystyle\int(2x+5)dx$

$=x^2+5x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=1$

$\therefore\ f(x)=x^2+5x+1$

따라서 $f(2)=15$

7. [출제의도] 명제의 대우 이해하기

주어진 명제가 참이므로

대우 명제 '$x=3$이면 $x^2-ax+9=0$이다.'가 참이다.

$\therefore\ 9-3a+9=0$

따라서 $a=6$

8. [출제의도] 등비급수의 수렴과 발산 이해하기

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-4}{3}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x-4}{3}<1$

$\therefore\ 1<x<7$

$1<x<7$을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4, 5, 6

따라서 정수 x의 개수는 5

9. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-4t^2-3t+4$일 때 시각 t에서 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-8t-3$

점 P가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-8t-3=0$

$(3t+1)(t-3)=0$

따라서 $t=3$ ($\because t>0$)

10. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f'(x)=4x+5$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{3h}=\frac{1}{3}f'(4)=7$

11. [출제의도] 수열의 합 이해하기

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=2^{n-1}$이다.

$a_{2k-1}=2^{2k-2}=4^{k-1}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{5}4^{k-1}=\frac{1\times(4^5-1)}{4-1}=341$

12. [출제의도] 지수를 활용하여 문제해결하기

두 비행기 A, B의 필요마력을 각각 P_A, P_B 날개의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하자.

$P_A=\dfrac{1}{150}kC(V_A)^3S_A$이고, $S_B=3S_A$이므로

$P_B=\dfrac{1}{150}kC(V_B)^3S_B=\dfrac{1}{150}kC(V_B)^3(3S_A)$

$P_B=\sqrt{3}\,P_A$이므로

$\dfrac{P_A}{P_B}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{(V_A)^3S_A}{(V_B)^3(3S_A)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{V_A}{V_B}\right)^3$

$\therefore\ \left(\dfrac{V_A}{V_B}\right)^3=3^{\frac{1}{2}}$

따라서 $\dfrac{V_A}{V_B}=3^{\frac{1}{6}}$

13. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

14. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)=3$

$1-x=t$라 하면

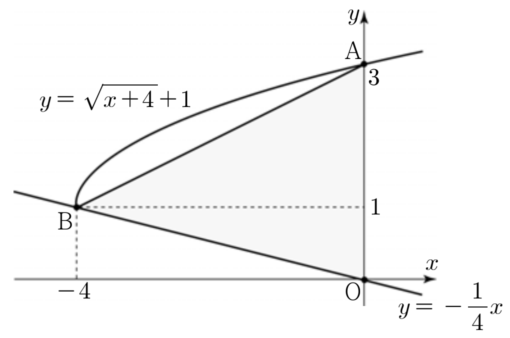
$\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(1-x)=\lim_{t\to -1+}f(t)=-1$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 2-}f(x)f(1-x)=3\times(-1)=-3$

15. [출제의도] 무리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x+4}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 두 점 A$(0,3)$, B$(-4,1)$을 지난다.

직선 $y=-\dfrac{1}{4}x$는 원점 O와 점 B를 지난다.



$\therefore\ \triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

(1) $n=2$일 때, $(*)$에서

(좌변)$=a_1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}=\boxed{\dfrac{5}{2}}$

(우변)$=2a_2=2\times\left(1+\dfrac{1}{4}\right)=\boxed{\dfrac{5}{2}}$

(좌변)=(우변)이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}=ma_m$

이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+\displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}$

$=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}+\frac{1}{m+1}$

$=ma_m+a_m+\dfrac{1}{m+1}$

$=\boxed{(m+1)}\times a_m+\dfrac{1}{m+1}$

$=(m+1)\left\{a_{m+1}-\dfrac{1}{(m+1)^2}\right\}+\dfrac{1}{m+1}$

$=(m+1)a_{m+1}$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(1), (2)에 의하여

$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$\therefore\ p=\dfrac{5}{2}$, $f(m)=m+1$

따라서 $p\times f(3)=10$

17. [출제의도] 필요조건과 충분조건을 활용하여 추론하기

ㄱ. $p: a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$

$q: a=b$

$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄴ. $p: ab<0 \Leftrightarrow (a>0,\ b<0)$ 또는 $(a<0,\ b>0)$

$q: a<0$ 또는 $b<0 \Leftrightarrow (a>0,\ b<0)$ 또는 $(a<0,\ b>0)$ 또는 $(a<0,\ b<0)$

$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. $p: a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$에서

$a-b=0$ 또는 $a^2+ab+b^2=0$

$a=b$

$q: a^2-b^2=(a+b)(a-b)=0$이므로

$a=b$ 또는 $a=-b$

$\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\sqrt{x+n}$이 만나는 두 점은 $(-n,0)$, $(n-1,\sqrt{2n-1})$이므로

두 점 사이의 거리 $a_n = \sqrt{4n^2-2n}$ 이고
원의 지름의 길이 $b_n = 2n$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(2n - \sqrt{4n^2-2n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(2n-\sqrt{4n^2-2n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2-2n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2-2n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n+\sqrt{4n^2-2n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{2+\sqrt{4-\dfrac{2}{n}}} = \dfrac{1}{2}$

19. [출제의도] 역함수를 활용하여 문제해결하기

$f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=3+a,\ f(4)=4+a$이고
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
그러므로 $a = -1$
역함수 $g(x)$는
$g(1)=1,\ g(2)=3,\ g(3)=4,\ g(4)=2$이므로
$g^3(x)=g^6(x)=g^9(x)=x$이다.

$\therefore\ g^{10}(x)=g(g^9(x))=g(x),$

$g^{11}(x)=g(g^{10}(x))=g(g(x))=g^2(x)$

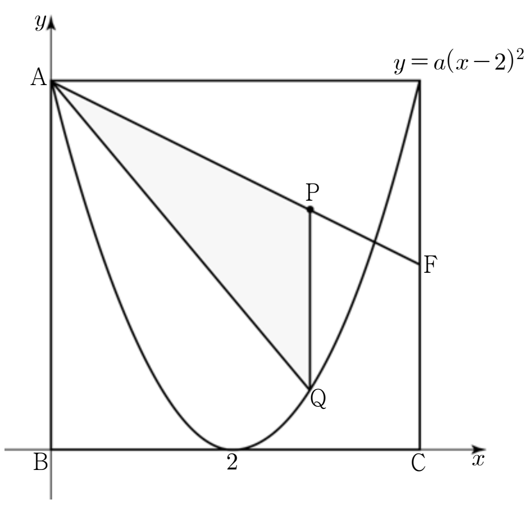
따라서 $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=a+g(2)+g^2(2)$

$= -1+3+4=6$

20. [가형 18번과 동일]

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

주어진 그림을 꼭짓점 B를 원점으로, 직선 BC를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



직선 AF의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

포물선 $y=a(x-2)^2\ (a>0)$은 점 $\mathrm{A}(0,4)$를 지나므로
$4=a\times(0-2)^2,\ a=1$

포물선 $y=(x-2)^2$과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$가

만나는 점의 x의 좌표는 $x=0,\ x=\dfrac{7}{2}$

점 P의 x좌표를 $t\left(0<t<\dfrac{7}{2}\right)$라 하면

점 $\mathrm{P}\left(t, -\dfrac{1}{2}t+4\right)$, 점 $\mathrm{Q}(t, (t-2)^2)$이고

삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times t\times\left\{-\dfrac{1}{2}t+4-(t-2)^2\right\}=-\dfrac{1}{4}\left(2t^3-7t^2\right)$

$S'(t)=-\dfrac{1}{4}\left(6t^2-14t\right)=-\dfrac{1}{2}t(3t-7)$

$S'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\dfrac{7}{3}$

$S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{7}{3}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{7}{2}\right)$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$S\left(\dfrac{7}{3}\right)$	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\dfrac{7}{3}$에서 극대이면서 최대이므로
$S(t)$의 최댓값은

$-\dfrac{1}{4}\times\left\{2\times\left(\dfrac{7}{3}\right)^3-7\times\left(\dfrac{7}{3}\right)^2\right\}=\dfrac{343}{108}$

22. [가형 22번과 동일]

23. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_5=S_5-S_4=55-40=15$

24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x^2+x-6)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+3)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2}$

$=(2+3)(\sqrt{2+2}+2)$

$=20$

25. [가형 25번과 동일]

26. [출제의도] 집합의 개념 이해하기

$X=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$이므로
$n(X)=10$이 되기 위해서는
$(a+3<2,\ a+5\geq2)$
또는 $(a+1\leq9,\ a+3>9)$
$\therefore\ -3\leq a<-1$ 또는 $6<a\leq8$
그러므로 자연수 a는 7, 8
따라서 자연수 a의 최댓값은 8

27. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$2^a=3^b$에서 양변에 2^b을 곱하면
$2^a\times2^b=3^b\times2^b$
$2^{a+b}=6^b$

$a+b=\dfrac{4}{3}ab$이므로 $2^{\frac{4}{3}ab}=6^b$

$2^{\frac{4}{3}a}=6,\ 2^a=6^{\frac{3}{4}}$

$\therefore\ 8^a\times3^b=(2^a)^3\times2^a=(2^a)^4=216$

28. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

주어진 이차방정식의 서로 다른 두 실근을 α_n, β_n이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha_n+\beta_n=a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$, $\alpha_n\beta_n=-a_{n+1}$

$\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n+1)(\beta_n+1)=\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n\beta_n+\alpha_n+\beta_n+1)$

$=\sum_{n=1}^{10}(-a_{n+1}+2a_{n+1}+1)$

$=\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}+1)=180$

$\therefore\ a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+10=180$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 a_1을 더하면

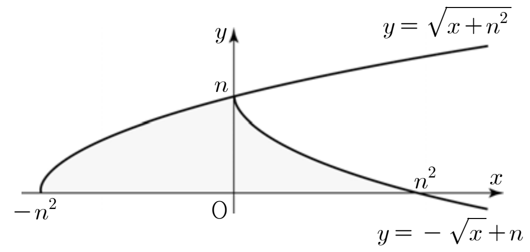
$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{11}+10=a_1+180$

$\dfrac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=\dfrac{11\times(6+a_{11})}{2}=6+170$

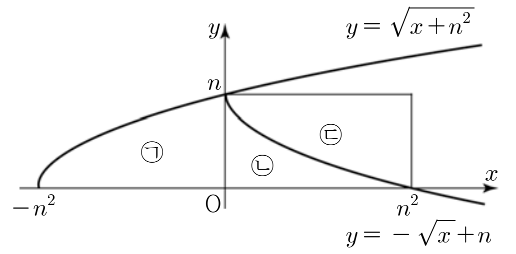
$\therefore\ a_{11}=26$

29. [출제의도] 수열의 합 추론하기

함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-n^2$만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 두 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는 <그림1>과 같다.



<그림1>



<그림2>

이 때, 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프는
함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 n^2만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로 <그림2>와 같이
함수 $y=\sqrt{x+n^2}$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역 ㉠의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 함수 $y=-\sqrt{x}+n$의 그래프와 두 직선 $x=n^2$, $y=n$으로 둘러싸인 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.
그러므로 영역 ㉠과 영역 ㉡의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 영역 ㉡과 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.
x축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, n^2 이므로 (n^2+1)개
y축 위의 정수인 점은 0, 1, $\cdots$, n 이므로 $(n+1)$개
$\therefore\ a_n=(n^2+1)(n+1)=n^3+n^2+n+1$
따라서

$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}(n^3+n^2+n+1)$

$=\left(\dfrac{5\times6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5\times6\times11}{6}\right)+\left(\dfrac{5\times6}{2}\right)+5$

$=300$

[다른 풀이]
<그림1>에서 y의 값에 대한 점의 개수는 아래의 표와 같다.

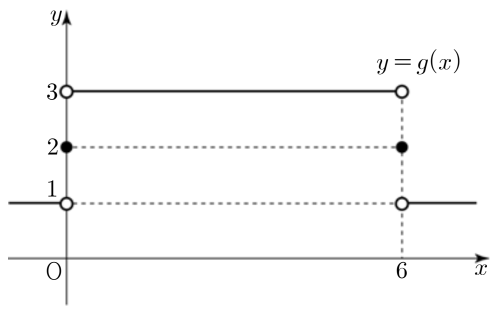
n	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	합
1	3	1					4
2	9	5	1				15
3	19	13	7	1			40
4	33	25	17	9	1		85
5	51	41	31	21	11	1	156

$\sum_{n=1}^{5}a_n=4+15+40+85+156=300$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

(가)에서 함수 $g(x)$가 $x=0,\ x=6$에서 불연속이므로

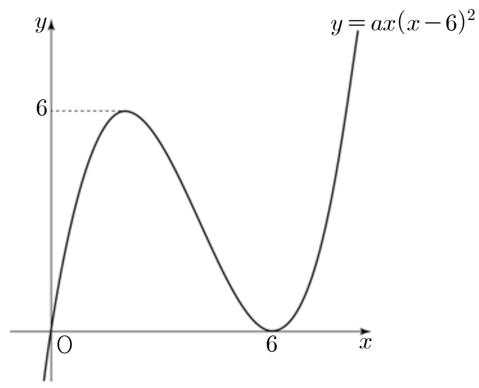
함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 6이고
함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



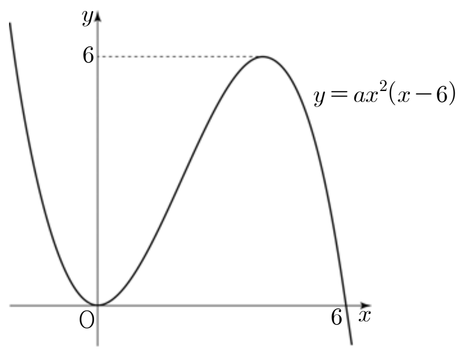
(나)에서 함수 $f(x)g(x)$는

$$f(x)g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0,\ x>6) \\ 2f(x) & (x=0,\ x=6) \\ 3f(x) & (0<x<6) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$, $\lim_{x\to 6} f(x)g(x)=f(6)g(6)$
그러므로 $f(0)=0$, $f(6)=0$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은
<그림1> 또는 <그림2> 중 하나이다.



<그림1>



<그림2>

이때 (다)에서 $f(5)f(7)<0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 <그림2>와 같다.
$\therefore\ f(x)=ax^2(x-6)$
$f'(x)=3ax(x-4)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$이므로
함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.
$f(4)=-32a=6$, $a=-\frac{3}{16}$
$\therefore\ f(x)=-\frac{3}{16}x^2(x-6)$
따라서 $f(-4)=-\frac{3}{16}\times(-4)^2\times(-4-6)=30$