2016학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 나형 정답

1	③	2	②	3	③	4	⑤	5	④
6	②	7	①	8	②	9	①	10	④
11	⑤	12	③	13	④	14	⑤	15	①
16	④	17	②	18	①	19	③	20	⑤
21	⑤	22	24	23	3	24	7	25	40
26	16	27	36	28	26	29	11	30	435

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

두 다항식 $A=x^2-y^2$, $B=2x^2+y^2$ 에서

$A+B=(x^2-y^2)+(2x^2+y^2)=3x^2$

2. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$i(1+i)=i+i^2=i+(-1)=-1+i$

3. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=3^0=1$

4. [출제의도] 내분점의 좌표를 구한다.

두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(8,0)$ 을 $3:1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times 8+1\times 0}{3+1},\ \dfrac{3\times 0+1\times 0}{3+1}\right)$ 이므로 $(6,0)$

5. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$f^{-1}(2)=a$ 라 하면 역함수의 성질에 의하여

$f(a)=2$ 이므로

$f(a)=3a-1=2$

따라서 $a=1$ 이므로

$f^{-1}(2)=1$

[다른풀이]

$y=3x-1$ 에서

$3x=y+1$

$x=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}$

위의 식에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ 이고,

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ 이므로

$f^{-1}(2)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}$

$=1$

6. [출제의도] 등비수열의 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 에서 a_3은 a_2와 a_4의 등비중항이므로

$a_3{}^2=a_2\times a_4$

$=2\times 18$

$=36$

이고, $a_3>0$ 이므로

$a_3=6$

[다른풀이]

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하면

$a_2=ar=2$ ⋯⋯ ㉠

$a_4=ar^3=18$ ⋯⋯ ㉡

㉡ ÷ ㉠ 에서

$r^2=9$

이고, $r>0$ 이므로

$r=3$

㉠ 에 대입하면

$3a=2$, $a=\dfrac{2}{3}$

이므로

$a_3=ar^2$

$=\dfrac{2}{3}\times 3^2$

$=6$

7. [출제의도] 연립이차방정식의 해를 구한다.

$\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

이라 하면 ㉠ 에서

$y=x-3$ ⋯⋯ ㉢

이고, ㉢ 을 ㉡ 에 대입하면

$x(x-3)+x+1=0$

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

$x=1$ 을 ㉢ 에 대입하면

$y=-2$

따라서 $a=1$, $b=-2$ 이므로

$a+b=-1$

8. [출제의도] 무리함수의 평행이동을 이용하여 상수의 값을 구한다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수의 식은

$y=\sqrt{a(x-1)}-2$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\sqrt{a\times(-1)}-2$

$\sqrt{-a}=2$

$-a=4$

$a=-4$

9. [출제의도] 로그의 계산을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

100 개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도 T_1 은

$\dfrac{T_1}{100}=\log 100$

에서

$T_1=200$

1000 개의 자료를 처리할 때의 시간복잡도 T_2 는

$\dfrac{T_2}{1000}=\log 1000$

에서

$T_2=3000$

따라서

$\dfrac{T_2}{T_1}=\dfrac{3000}{200}=15$

10. [출제의도] 삼차방정식의 허근을 구한다.

방정식 $x^3+8=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

이므로

$x=-2$ 또는 $x^2-2x+4=0$

$x^2-2x+4=0$ 의 근을 구하면

$x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 방정식 $x^3+8=0$ 의 근은

$x=-2$ 또는 $x=1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=1-\sqrt{3}i$

이때

$x=-2+0i$ 의 허수부분은 0,

$x=1+\sqrt{3}i$ 의 허수부분은 $\sqrt{3}$,

$x=1-\sqrt{3}i$ 의 허수부분은 $-\sqrt{3}$

이다.

따라서 α 의 값은 $1+\sqrt{3}i$ 이므로

$\overline{\alpha}=1-\sqrt{3}i$

$\alpha-\overline{\alpha}=1+\sqrt{3}i-\overline{(1+\sqrt{3}i)}$

$=1+\sqrt{3}i-(1-\sqrt{3}i)$

$=2\sqrt{3}i$

11. [출제의도] 필요충분조건을 이용하여 실수의 값을 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 $p: x^2-2x-3\le 0$ 에서

$(x-3)(x+1)\le 0$ 이므로

$P=\{x\mid -1\le x\le 3\}$

조건 $q: |x-a|\le b$ 에서

$-b\le x-a\le b$

$a-b\le x\le a+b$ 이므로

$Q=\{x\mid a-b\le x\le a+b\}$

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이어야 한다. 따라서 두 등식 $a-b=-1$, $a+b=3$ 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$ 이므로

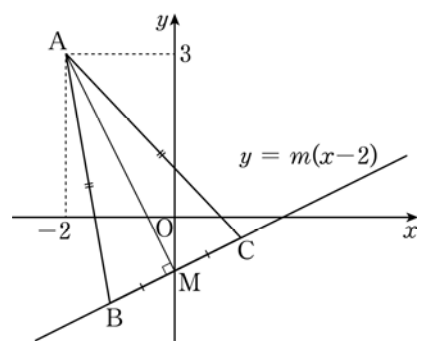
$ab=2$

12. [출제의도] 두 직선이 서로 수직이 되는 기울기를 구한다.

선분 BC 의 중점을 M 이라 하자.

삼각형 ABC 는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변삼각형이고 밑변 BC 의 중점이 M이므로 두 선분 AM, BC 는 서로 수직이다.

점 M 은 직선 $y=m(x-2)$ 와 y 축이 만나는 점이므로 $\mathrm{M}(0,-2m)$ 이다.



직선 BC 의 기울기는 m 이고,

두 점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{M}(0,-2m)$ 에서

(직선 AM 의 기울기)$=\dfrac{-2m-3}{0-(-2)}$

$=\dfrac{-2m-3}{2}$

두 직선이 서로 수직일 때 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로

$m\times\dfrac{-2m-3}{2}=-1$

$2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$m>0$ 이므로

$m=\dfrac{1}{2}$

13. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 점근선의 교점을 구한다.

$f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{2x-1}$

$=\dfrac{\frac{3}{2}}{2x-1}+\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$$

이므로 유리함수 $f(x)=\frac{\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$ 의 그래프는 유리함수 $y=\frac{\frac{3}{4}}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

유리함수 $f(x)=\frac{\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$ 의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $p+q=1$

[참고]

유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ (단, $a\neq 0$, $ad-bc\neq 0$)의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$ 이고, 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$에 대하여 대칭이다.

14. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 상용로그를 계산한다.

$f(\log_3 6)=\frac{\log_3 6+1}{2\log_3 6-1}$ 에서

$\log_3 6+1=\log_3 6+\log_3 3=\log_3 18$

$2\log_3 6-1=\log_3 6^2-\log_3 3=\log_3 12$

로그의 밑의 변환 공식에 의하여

$$f(\log_3 6)=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}$$
$$=\frac{\frac{\log 18}{\log 3}}{\frac{\log 12}{\log 3}}$$
$$=\frac{\log 18}{\log 12}$$
$$=\frac{\log(2\times 3^2)}{\log(2^2\times 3)}$$
$$=\frac{\log 2+2\log 3}{2\log 2+\log 3}$$
$$=\frac{a+2b}{2a+b}$$

[다른풀이]

$$\log_3 6=\frac{\log 6}{\log 3}$$
$$=\frac{\log(2\times 3)}{\log 3}$$
$$=\frac{\log 2+\log 3}{\log 3}$$
$$=\frac{a+b}{b}$$

$$f(\log_3 6)=f\left(\frac{a+b}{b}\right)$$
$$=\frac{\frac{a+b}{b}+1}{2\times\frac{a+b}{b}-1}$$
$$=\frac{\frac{a+2b}{b}}{\frac{2a+b}{b}}$$
$$=\frac{\frac{a+2b}{b}\times b}{\frac{2a+b}{b}\times b}$$
$$=\frac{a+2b}{2a+b}$$

15. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치 관계를 이용하여 이차함수의 최댓값을 구한다.

이차방정식 $h(x)=0$ 의 두 근이 2와 6이므로 인수정리에 의하여 $h(x)=k(x-2)(x-6)$ 이다.

이때 $g(x)$는 일차함수이고 $f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이므로 함수 $h(x)$는 이차함수이고 이차항의 계수는 -1이다.

$$h(x)=-(x-2)(x-6)$$
$$=-x^2+8x-12$$
$$=-(x-4)^2+4$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 최댓값 4를 갖는다.

$p=4$, $q=4$이므로

$p+q=8$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 증명한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=\frac{{a_1}^2+1}{2a_1}$ 에서

${a_1}^2=1$

$a_1>0$이므로

(좌변)$=a_1=1$,

(우변)$=1-0=1$

따라서 $n=1$일 때 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})+a_{m+1}$$
$$=(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+\cdots+(\sqrt{m}-\sqrt{m-1})+a_{m+1}$$
$$=\boxed{\sqrt{m}}+a_{m+1}$$

주어진 조건에서

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}}$ 이므로

$$\frac{{a_{m+1}}^2+1}{2a_{m+1}}=\sqrt{m}+a_{m+1}$$

즉,

$${a_{m+1}}^2+2\sqrt{m}\times a_{m+1}-1=0$$
$$a_{m+1}=-\sqrt{m}\pm\sqrt{m+1}$$

이고, $a_{m+1}>0$이므로

$$a_{m+1}=\boxed{\sqrt{m+1}}-\sqrt{m}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 이다.

$f(m)=\sqrt{m}$, $g(m)=\sqrt{m+1}$ 이므로

$f(25)+g(35)=5+6=11$

17. [출제의도] 인수분해를 이용하여 자연수의 값을 구한다.

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$을 b에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$(a^2+2a+1)b+a^2+2a+1$$
$$=(a+1)^2b+(a+1)^2$$
$$=(a+1)^2(b+1)$$

위의 식의 값이 $245=7^2\times 5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times 5$

a, b는 자연수이므로

$a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=10$

[다른풀이]

$a^2b+2ab+a^2+2a+b+1$을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$(b+1)a^2+2(b+1)a+(b+1)$$
$$=(b+1)(a^2+2a+1)$$
$$=(a+1)^2(b+1)$$

위의 식의 값이 $245=7^2\times 5$이므로

$(a+1)^2(b+1)=7^2\times 5$

a, b는 자연수이므로

$a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=10$

18. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.

세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(8, 4)$, $\mathrm{B}(7, a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{0+8+7}{3}, \frac{0+4+a}{3}\right)$ 즉, $\left(5, \frac{4+a}{3}\right)$

이므로

$b=\frac{4+a}{3}$ …… ㉠

한편, 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x$ 즉, $x-2y=0$

점 $\mathrm{G}(5, b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

$|5-2b|=5$

$5-2b=5$ 또는 $5-2b=-5$

$b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>0$이다.

따라서 $b=5$, $a=11$이므로

$a+b=16$

19. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 추론한다.

$\sum_{k=2}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=2n^2+2$ $(n\geq 2)$ …… ㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_2-a_1=10$

두 식 $a_1+a_2=8$, $a_2-a_1=10$을 연립하여 풀면

$a_1=-1$, $a_2=9$

2 이상인 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=2}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$
$$=(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$$
$$=a_n-a_1$$
$$=a_n+1$$

㉠에서

$a_n+1=2n^2+2$

$a_n=2n^2+1$ $(n\geq 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은

$a_1=-1$, $a_n=2n^2+1$ $(n\geq 2)$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k$$
$$=-1+\sum_{k=2}^{10}(2k^2+1)$$

$=-1+\sum_{k=1}^{10}(2k^2+1)-3$

$=-4+2\sum_{k=1}^{10}k^2+1\times10$

$=-4+2\times\dfrac{10\times11\times21}{6}+10$

$=776$

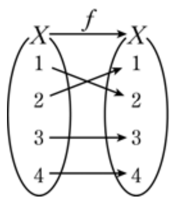
20. [출제의도] '모든'과 '어떤'의 의미를 이해하여 함수의 개수를 추론한다.

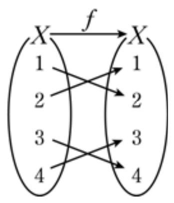
ㄱ. 함수 f가 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
조건 (가)에서 집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$(f\circ f)(x)=x$이므로
집합 X의 모든 원소 x에 대하여
$f(x)=f^{-1}(x)$이다.
따라서
$f(3)=f^{-1}(3)$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $f(x)=2x$이므로 집합 X의 원소 중 $f(x)=2x$를 만족하는 원소 x가 적어도 하나 존재한다.
따라서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립한다.
따라서 $f(1)=3\,(\neq2)$이면 $f(2)=4$이다. (참)

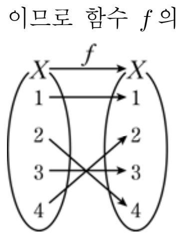
ㄷ. 조건 (나)에서 $f(1)=2$와 $f(2)=4$ 중 적어도 하나는 성립하므로
$f(1)=2$이고 $f(2)\neq4$일 때,
$f(2)=4$이고 $f(1)\neq2$일 때,
$f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때
로 나눌 수 있다.

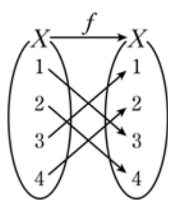
(i) $f(1)=2$이고 $f(2)\neq4$일 때,
조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(1)=1$이므로
$f(f(1))=f(2)=1$
이때 조건 (가)에 의하여
$f(3)=3$, $f(4)=4$
또는 $f(3)=4$, $f(4)=3$
이므로 함수 f의 개수는 2이다.





(ii) $f(2)=4$이고 $f(1)\neq2$일 때,
조건 (가)에 의하여 $(f\circ f)(2)=2$이므로
$f(f(2))=f(4)=2$
이때 조건 (가)에 의하여
$f(1)=1$, $f(3)=3$
또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$
이므로 함수 f의 개수는 2이다.

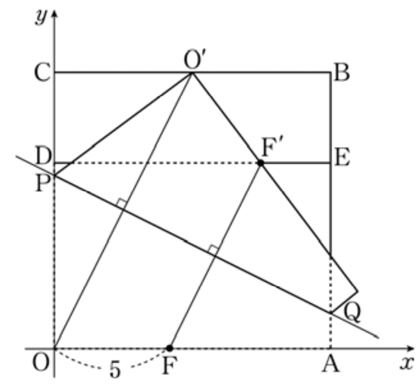




(iii) $f(1)=2$이고 $f(2)=4$일 때,
$f(f(1))=f(2)=4\,(\neq1)$
이므로 $(f\circ f)(1)=1$이 성립하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서
가능한 함수 f의 개수는 4이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

21. [출제의도] 두 직선의 평행과 수직을 이용하여 종이접기에 대한 문제를 해결한다.



좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0,0)$, $(12,0)$, $(12,12)$, $(0,12)$, $(5,0)$이다.
점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a,12)$로 놓을 수 있다.
또 점 F′은 선분 DE 위의 점이고, 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 F′의 좌표를 $(b,8)$로 놓을 수 있다.
직선 OO′과 직선 FF′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 FF′은 서로 평행하다.
따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{8-0}{b-5}$

$2a=3b-15$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(8-12)^2}=5$

$(b-a)^2=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $0\le a\le12$, $0\le b\le12$의 범위에서 해를 구하면

$a=6$, $b=9$

직선 PQ는 선분 OO′의 중점 $(3,6)$과 선분 FF′의 중점 $(7,4)$를 지나는 직선이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=\dfrac{6-4}{3-7}(x-3)+6$

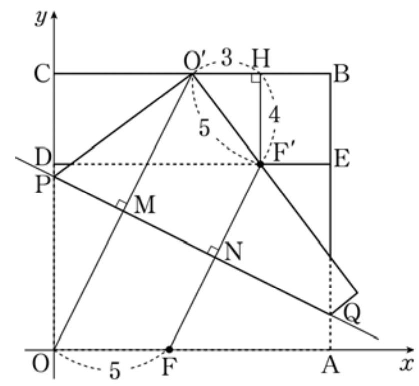
$=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로

$m+n=7$

[다른풀이]

좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0,0)$, $(12,0)$, $(12,12)$, $(0,12)$, $(5,0)$이다.
점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a,12)$로 놓을 수 있다.



$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이고 $\overline{\mathrm{HF'}}=4$이므로

$\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'F'}}^2-\overline{\mathrm{HF'}}^2}$

$=3$

따라서 점 F′의 좌표를 $(a+3,8)$로 놓을 수 있다.
선분 OO′의 중점을 M, 선분 FF′의 중점을 N이라 하면

$\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{2},6\right)$, $\mathrm{N}\left(\dfrac{a+8}{2},4\right)$

이고, 두 점 M, N은 직선 PQ 위의 점이므로
직선 PQ의 기울기는

$\dfrac{4-6}{\dfrac{a+8}{2}-\dfrac{a}{2}}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

직선 OO′과 직선 PQ는 수직이므로 직선 OO′의 기울기는 2이다.

$\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{12}{a}=2$

$a=6$이므로

$\mathrm{M}(3,6)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-3)+6$

$=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로

$m+n=7$

22. [출제의도] 합집합의 모든 원소의 합을 구한다.

두 집합 $A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6,9\}$에서
$A\cup B=\{2,3,4,6,9\}$
따라서 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은
$2+3+4+6+9=24$

23. [출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 계수의 값을 구한다.

주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면
$8-4-10+a=0$
따라서 $a=6$이므로 이를 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$x^3-x^2-5x+6=(x-2)(x^2+x+b)$

$=x^3-x^2+(b-2)x-2b$

양변의 계수를 비교하면 $b=-3$이므로 $a+b=3$이다.

[다른풀이]

주어진 등식이 $x^3-x^2-5x+a=(x-2)(x^2+x+b)$이므로 x^3-x^2-5x+a를 $x-2$로 나누면 몫이 x^2+x+b이고 나머지가 0이다.
조립제법을 이용하여 계산하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -5 & a \\ & & 2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & \boxed{a-6} \end{array}$$

따라서 몫은 x^2+x-3이고 나머지는 $a-6$에서
$a=6$, $b=-3$이므로 $a+b=3$이다.

24. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

이차방정식 $x^2-ax+a-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a-3$
두 근의 합이 10이므로
$a=10$
따라서 두 근의 곱은 $a-3=7$이다.

25. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.

나머지정리에 의하여 다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나눈 나머지는
$P(k)=k^3+k^2+k+1$
다항식 $P(x)$를 $x+k$로 나눈 나머지는
$P(-k)=-k^3+k^2-k+1$
나머지의 합이 8이므로

$P(k)+P(-k)=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)$

$=2k^2+2$

$=8$

$k^2=3$

다항식 $P(x)$ 를 $x-k^2$ 으로 나눈 나머지는

$P(k^2)=(k^2)^3+(k^2)^2+k^2+1$

$=3^3+3^2+3+1$

$=40$

26. [출제의도] 집합의 연산법칙과 집합의 포함 관계를 이용하여 부분집합의 개수를 구한다.

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로

$P=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1,\ 4,\ 5\}$

$P\subset X\subset U$이므로

$\{1,\ 4,\ 5\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

집합 X는 1 , 4 , 5 를 반드시 원소로 갖는 전체집합 U의 부분집합이다.

이를 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$

27. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 최솟값을 구한다.

$\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\sqrt[4]{a}=n$ (n은 자연수)라 하고 양변을 네제곱하면

$\dfrac{9}{4}a=n^4$ 즉,

$\dfrac{3^2}{4}a=n^4$

등식의 좌변이 자연수 n의 네제곱이 되려면

$a=4\times3^2\times k^4$ (k는 자연수)

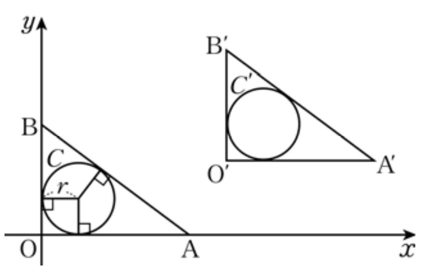
의 꼴이어야 한다.

$k=1$ 일 때 a의 최솟값은 36 이다.

28. [출제의도] 평행이동을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

두 삼각형 OAB , O′A′B′ 에 내접하는 원을 각각 C, C' 이라 하자.

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C는 x축, y축에 모두 접하고 제1사분면에 중심이 있으므로 중심의 좌표는 $(r,\ r)$ 이다.



또한 두 점 A(4, 0) , B(0, 3) 에 대하여 직선 AB 의 방정식은

$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$

즉 $3x+4y-12=0$ 이고 원 C가 직선 AB 에 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$ 와 직선 AB 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$\dfrac{|3r+4r-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$

$|7r-12|=5r$

$7r-12=5r$ 또는 $7r-12=-5r$

$r=6$, $r=1$

$0<r<3$ 이므로

$r=1$

따라서 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

점 A(4, 0) 을 x축의 방향으로 5 만큼, y축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 점 A′(9, 2) 가 되므로 이 평행이동에 의하여 원 C가 평행이동한 원 C' 의 방정식은

$(x-5-1)^2+(y-2-1)^2=1$

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

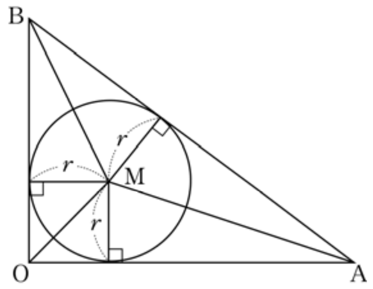
$x^2+y^2-12x-6y+44=0$

$a=-12$, $b=-6$, $c=44$ 이므로

$a+b+c=26$

[참고]

내접원 C의 반지름의 길이 r를 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.



원의 중심을 M 이라 하면, 점 M에서 세 변 OA , OB , AB 에 내린 수선의 길이는 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$\triangle$OAB $=\triangle$MOA $+\triangle$MAB $+\triangle$MBO 이므로

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times r+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times r+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times r$

$6=\dfrac{1}{2}r(4+5+3)$

$6r=6$

$r=1$

29. [출제의도] 판별식과 부등식의 영역을 이용하여 최솟값을 구한다.

모든 실수 x에 대하여

$x^2-2(a-1)x+b-2\geq0$

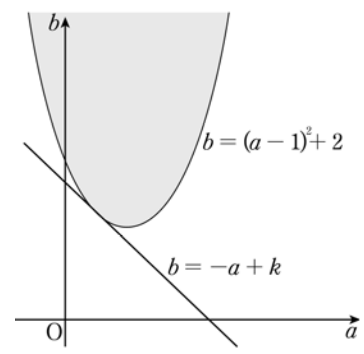
이므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+b-2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(a-1)^2-b+2\leq0$

따라서 점 $(a,\ b)$ 는 그림과 같은 좌표평면에서 부등식

$b\geq(a-1)^2+2$ ...... ㉠

의 영역에 속한다.



$a+b=k$ 라 하면 $b=-a+k$ 이므로 기울기가 -1 인 직선이 ㉠의 영역을 지나면서 b절편이 최소일 때 $a+b$의 값이 최소이다.

이는 직선 $b=-a+k$와 이차함수 $b=(a-1)^2+2$가 접할 때이므로 연립하면

$(a-1)^2+2=-a+k$

$a^2-a+3-k=0$

이차방정식 $a^2-a+3-k=0$ 의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-4(3-k)=0$

$k=\dfrac{11}{4}$

따라서 $m=\dfrac{11}{4}$ 이므로

$4m=11$

30. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 집합의 원소의 합을 추론한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하자.

$a_{10}=a_1+9d_1$ 이므로 조건 (가)에서

$55=1+9d_1$

$d_1=6$

따라서

$a_n=1+(n-1)6$

$=6n-5$

$A=\{1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\ 43,\ 49,\ 55\}$ 이므로

$n(A)=10$

조건 (나)에서

$n(A\cap B)=n(A\cap B^C)$ 이고,

$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)$

이므로

$n(A\cap B)=5$

만약 집합 A의 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열했을 때, 인접한 두 수가 $A\cap B$의 원소이면 수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소가 된다. 따라서 $n(A\cap B)=10$ 이므로 $n(A\cap B)=5$ 에 모순이다.

인접하지 않은 항으로 5 개의 원소를 선택하는 경우는 다음 두 가지 경우이다.

(i) $A\cap B=\{7,\ 19,\ 31,\ 43,\ 55\}$ 인 경우

모든 원소의 합은 $\dfrac{5(7+55)}{2}=155$ 이므로 조건 (다)에 모순이다.

(ii) $A\cap B=\{1,\ 13,\ 25,\ 37,\ 49\}$ 인 경우

모든 원소의 합은 $\dfrac{5(1+49)}{2}=125$ 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

따라서 $A\cap B=\{1,\ 13,\ 25,\ 37,\ 49\}$ 이다.

한편, $n(A\cap B)=\dfrac{1}{2}\times n(A^C\cap B)=5$ 이므로

$n(A^C\cap B)=10$

따라서

$n(B)=n(A\cap B)+n(A^C\cap B)$

$=5+10$

$=15$

공차가 6 인 등차수열의 항을 원소로 갖는 집합 A의 원소의 개수가 10 이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 공차가 6 이상이면 집합 B의 원소의 개수는 10 이하이다.

따라서 수열 $\{b_n\}$ 의 공차는 6 보다 작다.

이때 $n(A\cap B)=5$, $n(A^C\cap B)=10$ 이고,

수열 $\{b_n\}$ 은 등차수열이므로 집합 B의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

1 , c_1 , c_2 , 13 , c_3 , c_4 , 25 , c_5 , c_6 , 37 , c_7 , c_8 , 49 , c_9 , c_{10}

이라 할 수 있다.

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d_2라 하면

$13-1=12$

$=3d_2$ 이므로

$d_2=4$

$B=\{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \cdots,\ 53,\ 57\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 첫째항이 1 이고 공차가 4 인 등차수열의 제1항부터 제15항까지의 합과 같으므로

$\dfrac{15(1+57)}{2}=435$

[참고]

두 등차수열이 3 개 이상의 공통항을 가지면 그 공통항은 등차수열을 이룬다.