

2016학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

해설

1. [출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2x}{4x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} \\ &= 1 \times \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. [출제의도] 삼각함수의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} \theta = \frac{3}{4}\pi \text{는 제2사분면의 각이므로} \\ \sin \frac{3}{4}\pi &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{3}{4}\pi &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{이므로} \\ \sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{4}\pi &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

3. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 미분계수의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \\ \text{이므로} \\ f'(2) &= \frac{(2-1)e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

4. [출제의도] 적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x+2}{x^2} dx &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \left[3\ln x - \frac{2}{x} \right]_1^2 = (3\ln 2 - 1) - (0 - 2) = 3\ln 2 + 1 \end{aligned}$$

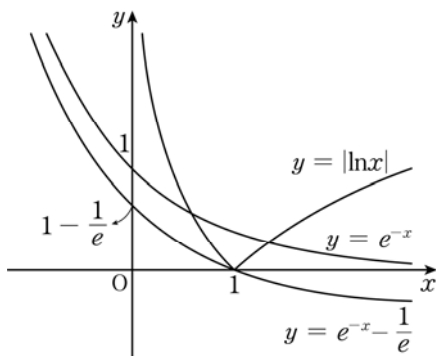
5. [출제의도] 함수의 평행이동을 이해하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

함수 $f(x) = a \sin x + 1$ 의 그래프는
함수 $y = a \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
조건 $a > 0$ 에서
 $y = a \sin x$ 가 최대일 때 $f(x)$ 는 최대이고,
 $y = a \sin x$ 가 최소일 때 $f(x)$ 는 최소이므로
함수 $f(x)$ 는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 $M = a + 1$,
 $\sin x = -1$ 일 때 최솟값 $m = -a + 1$ 을 갖는다.
따라서 $M - m = (a + 1) - (-a + 1) = 2a$
 $2a = 6$ 이므로 $a = 3$ 이다.

6. [출제의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

$y = e^{-x} - \frac{n-1}{e}$, $y = |\ln x|$ 의 교점의 개수는

- i) $n = 1$ 일 때, $y = e^{-x}$ 과 $y = |\ln x|$ 의 교점의 개수가 2이므로 $f(1) = 2$
ii) $n = 2$ 일 때, $y = e^{-x} - \frac{1}{e}$ 과 $y = |\ln x|$ 의 교점이 $(1, 0)$ 뿐이므로 $f(2) = 1$
따라서 $f(1) + f(2) = 2 + 1 = 3$



7. [출제의도] 연속성의 정의를 이해하고 도함수가 주어진 함수의 부정적분을 구한다.

- i) $x \leq 1$ 일 때, $f'(x) = e^{x-1}$ 이므로
 $f(x) = \int e^{x-1} dx = e^{x-1} + C_1$ (C_1 은 적분상수)
ii) $x > 1$ 일 때 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로
 $f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2$ (C_2 는 적분상수)

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + C_1) = 1 + C_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + C_2) = C_2 \\ \text{따라서 } 1 + C_1 &= C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) = e + \frac{1}{e^2} \text{에서 } \frac{1}{e^2} + C_1 &= e + \frac{1}{e^2} \text{ 이므로} \\ C_1 &= e, C_2 = e + 1 \\ \text{따라서 } f(e) &= \ln e + (e + 1) = e + 2 \end{aligned}$$

8. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미지수를 구하고, 함수값을 구한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + a \cos x \text{에서} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} + a \cos \frac{\pi}{2} = 1 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f'(x) &= \cos x - a \sin x \text{에서} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos \frac{\pi}{2} - a \sin \frac{\pi}{2} = -a = 3 \\ \text{따라서 } a &= -3 \text{이므로 } f(x) = \sin x - 3 \cos x \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{4} - 3 \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

9. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2a)e^x + (x^2+2ax+11)e^x \\ &= \{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x \\ \text{실수 전체의 집합에서 함수 } f(x) &\text{가 증가하므로} \\ \text{모든 실수 } x \text{에 대하여} \\ f'(x) &= \{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x \geq 0 \\ e^x > 0 \text{이므로 모든 실수 } x \text{에 대하여} \\ x^2+2(a+1)x+2a+11 &\geq 0 \end{aligned}$$

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+11=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (2a+11) = a^2 - 10 \leq 0$$

따라서 구하는 자연수 a 의 최댓값은 3이다.

10. [출제의도] 이항정리를 이용하여 로그부등식의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} f(n) &= {}_n C_0 + {}_n C_1 \left(\frac{1}{9}\right) + {}_n C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots + {}_n C_n \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{9}\right)^n = \left(\frac{10}{9}\right)^n \\ \log f(n) &= \log \left(\frac{10}{9}\right)^n \\ &= n(\log 10 - \log 9) \\ &= n(1 - 2\log 3) \\ &= n(1 - 2 \times 0.4771) \\ &= n(1 - 0.9542) \\ &= 0.0458n > 1 \end{aligned}$$

$$n > \frac{1}{0.0458} = 21.8 \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 22이다.

11. [출제의도] 치환적분법을 활용하여 삼각함수의 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= r \text{라 하면} \\ \overline{OH} &= r \cos \theta, \overline{PH} = r \sin \theta \text{이므로} \\ f(\theta) &= \frac{\overline{OH}}{\overline{PH}} = \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \text{에서}$$

$$\sin \theta = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{일 때 } t = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3} \text{일 때 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\ln t \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2}$$

$$= \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$$

12. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한값을 구한다.

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} e^x & (x \leq 0, x \geq 2) \\ \ln(x+1) & (0 < x < 2) \end{cases}$$

와 함수 $g(x)$ 에 대하여

- i) $g(x) = t$ 로 놓으면
 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $g(x) \rightarrow 2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 2+} f(t) = e^2$$

- ii) $f(x) = s$ 로 놓으면
 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 2$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = e^2 + 2$$

13. [출제의도] 정적분을 이용하여 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{ 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\} dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \right]_0^1$$

$$= \left\{ \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}$$

$$= \frac{5}{2\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}$$

14. [출제의도] 선분의 길이를 이용하여 지수함수의 극한값을 구한다.

$A(t, 2^t)$, $B\left(t, \left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$, $H(0, 2^t)$ 에서
 $\overline{AH} = t$ 이고, $\overline{AB} = 2^t - \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2^t - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{2^t - 1}{t} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1}{t} \right\}$$

$$= \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = 2\ln 2$$

[참고]

$a > 0$ 일 때, $a^t - 1 = s$ 로 놓으면

$$a^t = s + 1 \text{ 이므로 } t = \frac{\ln(s+1)}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

$t \rightarrow 0$ 일 때, $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \ln a}{\ln(s+1)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\frac{\ln(s+1)}{s}} = \ln a$$

15. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 창문 네 개 중 두 개를 택하여 붙이는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_4C_2$ 이다.

나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 2×2 이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 4! 이다.

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times 2 \times 2 \times 4! = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 2 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$$

16. [출제의도] 극한으로 표현된 함수의 대칭성을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

i) $x > 1$ 또는 $x < -1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n}} \times \cos 2\pi x}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1$$

ii) $x = 1$ 일 때

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n} + \cos 2\pi}{1^{2n} + 1} = 1$$

iii) $x = -1$ 일 때

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} + \cos 2\pi(-1)}{(-1)^{2n} + 1} = 1$$

iv) $-1 < x < 1$ 일 때

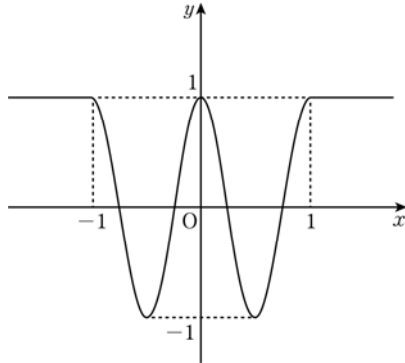
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1} = \cos 2\pi x$$

i), ii), iii), iv)로부터 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ \cos 2\pi x & (|x| < 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



$$g(x) = \int_{-x}^2 f(t) dt + \int_2^x t f(t) dt \text{ 에서}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, 함수 $y = x f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g(-2) = \int_2^{-2} f(t) dt + \int_2^{-2} t f(t) dt$$

$$= 0 + \int_2^{-2} t f(t) dt$$

$$= \int_2^{-2} t f(t) dt = 0$$

$$g(2) = \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^2 t f(t) dt$$

$$= \int_{-2}^2 f(t) dt + 0$$

$$= 2 \int_0^2 f(t) dt$$

$$= 2 \left\{ \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right\}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \Big|_0^1 + 2 \left[t \right]_1^2 \right]$$

$$= 0 + 2 = 2$$

따라서 $g(-2) + g(2) = 0 + 2 = 2$

[참고]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이면

$$f(-x) = f(x) \text{ 이고,}$$

$$g(x) = x f(x) \text{ 라 하면}$$

$$g(-x) = (-x) f(-x)$$

$$= -x f(x)$$

$$= -g(x) \text{ 이므로}$$

함수 $y = x f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

17. [출제의도] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구한다.

선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수이고 1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이다. 여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다.

세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나, 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.

i) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$

ii) 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는

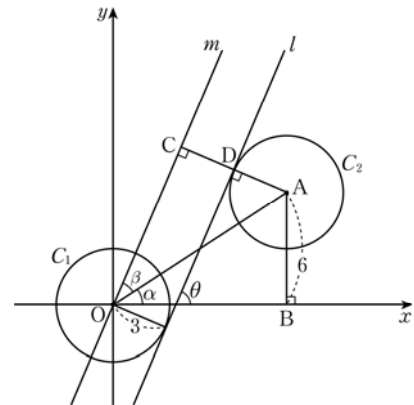
$${}_4C_1 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$$

i), ii)로부터 구하는 경우의 수는

$$4 + 24 = 28$$

18. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 직선의 기울기를 구하는 과정을 추론한다.

직선 OA가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α , 점 O를 지나고 직선 l 에 평행한 직선 m 이 직선 OA와 이루는 각의 크기를 β 라 하자. 점 A에서 x 축과 직선 m 에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 선분 AC가 원 C_2 와 만나는 점을 D라 하자.



직각삼각형 OAC에서

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 3 + 3 = 6 \text{ 이므로}$$

직각삼각형 AOB와 직각삼각형 OAC에서

$$\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ, \overline{AB} = \overline{AC} = 6,$$

선분 OA는 공통이므로 $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ 이다.

$$\angle AOB = \angle AOC \text{ 이므로 } \alpha = \beta \text{ 이다.}$$

따라서 $\tan \alpha = \tan \beta = \frac{6}{t}$ 이다.

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ

라 할 때, 두 직선 l, m 이 평행하므로

$$\theta = \alpha + \beta$$

$$\tan \theta = \tan(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{6}{t} + \frac{6}{t}}{1 - \frac{6}{t} \times \frac{6}{t}}$$

$$= \frac{12t}{t^2 - 36}$$

따라서 $f(t) = \frac{6}{t}$, $g(t) = \frac{12t}{t^2 - 36}$ 이므로

$$\frac{g(8)}{f(7)} = \frac{\frac{12 \times 8}{64 - 36}}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}} = 4$$

19. [출제의도] 함수의 도함수와 이계도함수를 이해하여 함수의 그래프와 관련된 성질을 추론한다.

함수 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)\{2(x^2 + 1) \cdot 2x\}}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2 + 1)\{- (x^2 + 1) - 2(1 - x^2)\}}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\neg. f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \text{ 에서 } f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \text{ (참)}$$

$$\cup. f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖고 $x = 1$ 에서 극댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$x > 0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이면서 최소이다. 따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 이다. (참)

ㄷ. $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ 이므로

$f''(x) = 0$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$f'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$...	0	...	$\sqrt{3}$...
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{8}$	↗

따라서 함수 $f'(x)$ 는

$x < -\sqrt{3}$ 또는 $0 < x < \sqrt{3}$ 에서 감소하고,

$-\sqrt{3} < x < 0$ 또는 $x > \sqrt{3}$ 에서 증가하므로

함수 $f'(x)$ 는 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다.

따라서 $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) < f'(0) = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고,

열린 구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$0 < a < b < 1$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{를 만족시키는 } c \text{가 열린}$$

구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. $\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $0 < a < b < 1$ 일 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(0) = 1 \text{이다. (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

20. [출제의도] 적분법을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

$x < 0$ 일 때, $\overline{PH} = e^{-x}$

$x \geq 0$ 일 때, $\overline{PH} = \sqrt{\ln(x+1)+1}$

이므로

x 축에 수직인 단면의 넓이는

$x < 0$ 일 때, e^{-2x} 이고

$x \geq 0$ 일 때, $\ln(x+1)+1$ 이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$V = \int_{-\ln 2}^0 e^{-2x} dx + \int_0^{e-1} \{\ln(x+1)+1\} dx \text{이고}$$

$$V_1 = \int_{-\ln 2}^0 e^{-2x} dx,$$

$$V_2 = \int_0^{e-1} \{\ln(x+1)+1\} dx$$

라 하면

$$V_1 = \int_{-\ln 2}^0 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} [e^{-2x}]_{-\ln 2}^0$$

$$= -\frac{1}{2} (1 - e^{2\ln 2})$$

$$= -\frac{1}{2} (1 - 4) = \frac{3}{2}$$

$$V_2 = \int_0^{e-1} \{\ln(x+1)+1\} dx \text{에서}$$

$x+1=t$ 로 놓으면

$$x=t-1 \text{에서 } \frac{dx}{dt}=1$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=e-1$ 일 때 $t=e$ 이므로

$$V_2 = \int_1^e (\ln t + 1) dt \text{이고}$$

$u(t)=\ln t+1$, $v'(t)=1$ 로 놓으면

$$u'(t)=\frac{1}{t}, v(t)=t \text{이므로}$$

$$V_2 = \int_1^e (\ln t + 1) dt$$

$$= \left[t(\ln t + 1) \right]_1^e - \int_1^e \left(t \times \frac{1}{t} \right) dt$$

$$= 2e - 1 - \left[t \right]_1^e$$

$$= 2e - 1 - (e - 1) = e$$

$$\text{따라서 } V = V_1 + V_2 = e + \frac{3}{2}$$

21. [출제의도] 삼각형과 내접원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.

삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로

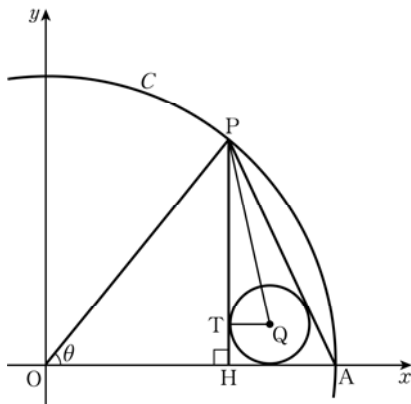
$$\angle OAP = \angle OPA = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \text{이고}$$

삼각형 APH에서

$$\angle APH + \angle PAH = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \angle APH = \frac{\theta}{2} \text{이다.}$$

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교

점을 T라 하면 $\angle QPT = \frac{\theta}{4}$ 이다.



$\overline{PH} = \sin \theta$ 이므로 삼각형 QPT에서

$$\tan \frac{\theta}{4} = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}} = \frac{r(\theta)}{\sin \theta - r(\theta)}$$

$$\left(1 + \tan \frac{\theta}{4} \right) r(\theta) = \sin \theta \tan \frac{\theta}{4}$$

이므로

$$r(\theta) = \frac{\sin \theta \tan \frac{\theta}{4}}{1 + \tan \frac{\theta}{4}}$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta \tan \frac{\theta}{4}}{\theta^2 \left(1 + \tan \frac{\theta}{4} \right)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 + \tan \frac{\theta}{4} \right)} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

[다른풀이]

내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하면

$$\triangle APH = \frac{1}{2} \times (\triangle APH \text{의 둘레의 길이}) \times r(\theta)$$

$$\triangle APH = \frac{1}{2} r(\theta) (\overline{PH} + \overline{AH} + \overline{AP})$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{PH}$$

따라서

$$\frac{\sin \theta + (1 - \cos \theta) + 2 \sin \frac{\theta}{2}}{2} \times r(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \times (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) r(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\text{따라서 } \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} + 1 \right) r(\theta) = (1 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}$$

$$r(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \text{이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}}{\theta^2 \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \times \frac{1}{1 + \cos \theta} \right\}$$

$$= \frac{1}{1+1+0} \times 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}$$

22. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.

$$\frac{1}{8} x^{-1} = 16 \text{에서}$$

$$\frac{1}{8} x^{-1} = 2^4 \text{이고,}$$

$$\frac{1}{8} x - 1 = 4, \frac{1}{8} x = 5 \text{이므로 } x = 40$$

23. [출제의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.

$$y = \ln(x-7) \text{에 대하여 } y' = \frac{1}{x-7}$$

곡선 $y = \ln(x-7)$ 에 접하는 직선의 기울기가 1일 때 접점의 x 좌표를 a 라 하면

$$\frac{1}{a-7} = 1 \text{이므로 } a = 8$$

따라서 접점의 좌표는 $(8, 0)$ 이다.

기울기가 1이고 점 $(8, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = x - 8$ 이므로 이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각 $A(8, 0)$, $B(0, -8)$ 이다.

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

24. [출제의도] 집합의 분할을 이해하고 분할하는 방법의 수를 구한다.

원소의 개수가 8인 집합 A 를 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 원소의 개수가 1인 집합과 7인 집합, 원소의 개수가 2인 집합과 6인 집합, 원소의 개수가 3인 집합과 5인 집합, 원소의 개수가 4인 두 개의 집합으로 분할하는 경우의 수를 모두 더한 값과 같다.

i) 원소의 개수가 1인 집합과 원소의 개수가 7인

집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A 에서 원소가 1개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_8C_1 = 8$

ii) 원소의 개수가 2인 집합과 원소의 개수가 6인

집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A에서 원소가 2개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_8C_2 = 28$

iii) 원소의 개수가 3인 집합과 원소의 개수가 5인 집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A에서 원소가 3개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 ${}_8C_3 = 56$

iv) 원소의 개수가 4인 두 개의 집합으로 분할하는 방법의 수

8개의 원소 중 4개를 택하여 하나의 집합을 만들고, 남은 4개의 원소로 다른 한 집합을 만들면 중복되는 경우가 2!개씩 나타나므로 그 경우의 수는 ${}_8C_4 \times \frac{1}{2!} = 35$

i), ii), iii), iv)로부터 구하는 방법의 수는 $8 + 28 + 56 + 35 = 127$

[다른풀이]

원소의 개수가 8인 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$

집합 A의 부분집합 중 공집합 또는 전체집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^8 - 2 = 254$$

따라서 두 개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수는

$$\frac{254}{2} = 127$$

[참고]

일반적으로 원소의 개수가 n (n 은 자연수)인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$

25. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활과 관련된 외적 문제를 해결한다.

필름을 투과하는 빛의 세기가

$$R = Q \times 10^{-P}$$

이므로

필름 A를 투과하는 빛의 세기는

$$R_A = Q \times 10^{-P} \dots \text{㉠}$$

필름 B를 투과하는 빛의 세기는

$$R_B = Q \times 10^{-P-2} \dots \text{㉡}$$

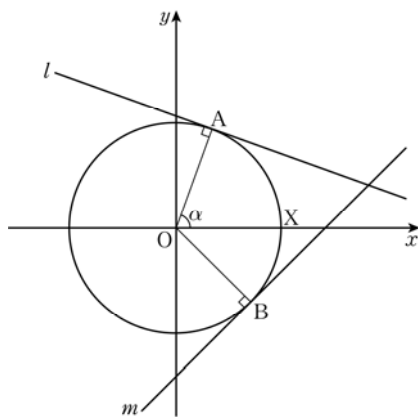
$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{R_A}{R_B} = \frac{Q \times 10^{-P}}{Q \times 10^{-P-2}} = 10^2 = 100$$

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

두 직선 l 과 m 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하는 점이 각각 A, B이므로

$$\overline{OA} \perp l, \overline{OB} \perp m$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 이 x 축의 양의 방향과 만나는 점을 X라 하고, $\angle AOX = \alpha$ 라 하자.



i) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

직선 OA가 직선 l 과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 3이다.

따라서

$$\tan \alpha = 3, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

직선 OB가 직선 m 과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1 이다.

$$\text{따라서 } \angle XOB = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

ii) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$$\tan \alpha = 3, \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

직선 OB가 직선 m 과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1 이다.

$$\text{따라서 } \angle XOB = \frac{3}{4}\pi$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle AOB) &= \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right) \\ &= \cos \frac{3}{4}\pi \cos \alpha + \sin \frac{3}{4}\pi \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos \alpha + \sin \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

iii) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{이다.}$$

iv) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

$$\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{이다.}$$

i), ii), iii), iv)로부터

$$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$100\cos^2(\angle AOB) = 100 \times \frac{1}{5} = 20$$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

조건 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 N 을

$N = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ 로 놓으면 $a + b + c + d = 7$ 이고 a, b, c 는 0 또는 자연수이고, d 는 홀수이므로 d 는 1, 3, 5 중 하나이다.

i) $d = 1$ 인 경우

$a + b + c = 6$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$

ii) $d = 3$ 인 경우

$a + b + c = 4$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

iii) $d = 5$ 인 경우

$a + b + c = 2$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

i), ii), iii)으로부터 구하는 자연수 N 의 개수는 $28 + 15 + 6 = 49$

28. [출제의도] 치환적분법을 이해하고 정적분 문제를 해결한다.

$$f(x) = \frac{e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{e^{\cos(\pi - x)}}{1 + e^{\cos(\pi - x)}} \\ &= \frac{e^{-\cos x}}{1 + e^{-\cos x}} \\ &= \frac{e^{-\cos x} \times e^{\cos x}}{(1 + e^{-\cos x}) \times e^{\cos x}} \\ &= \frac{1}{e^{\cos x} + 1} \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} a &= f(\pi - x) + f(x) \\ &= \frac{1}{e^{\cos x} + 1} + \frac{e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} \\ &= \frac{1 + e^{\cos x}}{1 + e^{\cos x}} = 1 \end{aligned}$$

$$b = \int_0^\pi f(x) dx$$

$$= \int_0^\pi \{1 - f(\pi - x)\} dx$$

$$= \int_0^\pi 1 dx - \int_0^\pi f(\pi - x) dx$$

$\pi - x = t$ 로 놓으면

$$x = \pi - t \text{이므로 } \frac{dx}{dt} = -1$$

$x = 0$ 일 때, $t = \pi$ 이고

$x = \pi$ 일 때, $t = 0$ 이므로

$$b = \pi + \int_\pi^0 f(t) dt$$

$$= \pi - \int_0^\pi f(t) dt = \pi - b$$

$$b = \pi - b \text{이므로 } b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } a + \frac{100}{\pi}b = 1 + \frac{100}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1 + 50 = 51$$

[다른풀이]

$$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) + f(\pi - x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

29. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

함수 f 가 집합 $X = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수라고 하자.

$$|f(x) + f(-x)| = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 1 \text{ 또는 } f(x) + f(-x) = -1$$

이므로

$x > 0$ 인 X 의 원소 x 에 대하여 다음이 성립한다.

i) $f(x) = 1$ 일 때, $f(-x) = -2$

ii) $f(x) = 2$ 일 때

$$f(-x) = -3 \text{ 또는 } f(-x) = -1$$

iii) $f(x) = 3$ 일 때, $f(-x) = -2$

따라서 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 을 대응시키는 경우의 수는 4이고, $f(2)$ 와 $f(-2)$ 를 대응시키는 경우의 수와 $f(3)$ 와 $f(-3)$ 을 대응시키는 경우의 수는 각각 4이므로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개수는 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 이다.

30. [출제의도] 함수의 미분법을 이용하여 함수의 연속성에 대한 문제를 해결한다.

함수 $f(x) = x^2 e^{ax}$ ($a < 0$) 에서

$$f'(x) = (x^2)' e^{ax} + x^2 (e^{ax})'$$

$$= 2x e^{ax} + ax^2 e^{ax} = (ax^2 + 2x) e^{ax} = ax \left(x + \frac{2}{a} \right) e^{ax}$$

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

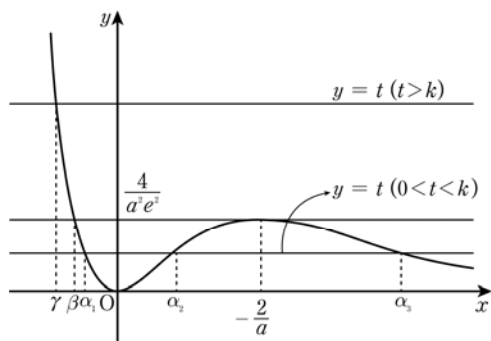
x	...	0	...	$-\frac{2}{a}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow	$\frac{4}{a^2 e^2}$	\searrow

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 0 를 갖고

$x = -\frac{2}{a}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{a^2 e^2}$ 를 갖는다.

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로

함수 $f(x) = x^2 e^{ax}$ ($a < 0$) 의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x) \geq t$ ($t > 0$) 을 만족시키는 x 의 최댓값

$g(t)$ 에 대하여 $k = \frac{4}{a^2 e^2}$ 라 하면, $g(t)$ 는 $0 < t < k$

또는 $t = k$ 또는 $t > k$ 로 나누어 생각할 수 있다.

i) $0 < t < k$ 일 때

방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 세 실근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 라 하면 부등식 $f(x) \geq t$ 의 해는 그림에서 $x \leq \alpha_1$ 또는 $\alpha_2 \leq x \leq \alpha_3$ 이므로 부등식을 만족시키는 x 의 최댓값은 α_3 이다.

따라서 $g(t) = \alpha_3$ 이다.

ii) $t = k$ 일 때

방정식 $f(x) = t$ 의 음의 실근을 β 라 하면 부등식 $f(x) \geq t$ 의 해는 $x \leq \beta$ 또는 $x = -\frac{2}{a}$ 이므로

로 $g(t) = -\frac{2}{a}$ 이다.

iii) $t > k$ 일 때

방정식 $f(x) = t$ 의 실근을 γ 라 하면 부등식 $f(x) \geq t$ 의 해는 $x \leq \gamma$ 이므로 $g(t) = \gamma$ 이다.

정의역이 $\left\{ x \mid x < \beta, x \geq -\frac{2}{a} \right\}$ 인 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) = f(x) & (x < \beta) \\ h_2(x) = f(x) & \left(x \geq -\frac{2}{a} \right) \end{cases}$$

라 정의하면, 두 함수 $y = h_1(x)$ 와 $y = h_2(x)$ 는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로 역함수를 갖는다.

또한, $y = h_1(x)$ 의 치역은 $\{y \mid y > k\}$ 이고, $y = h_2(x)$ 의 치역은 $\{y \mid 0 < y \leq k\}$ 이므로 함수

$h(x)$ 의 역함수의 정의역은 $\{x \mid x > 0\}$ 이다. 이때, $h(x) = t$ 를 만족하는 x 의 값은 방정식 $f(x) = t$ 의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$ 의 역함수가 $g(t)$ 이다.

$g(t)$ 는 $0 < t < k, t > k$ 인 모든 점에서 연속함수이므로 $t = k$ 에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\lim_{t \rightarrow k^-} g(t) = -\frac{2}{a}$ 에서 $a < 0$ 이므로 $-\frac{2}{a} > 0$

$\lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = \beta$ 에서 $\beta < 0$ 이므로

$\lim_{t \rightarrow k^-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k^+} g(t)$ 이다.

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t = k$ 에서만 불연속이다.

$$k = \frac{4}{a^2 e^2} = \frac{16}{e^2}, \quad \frac{4}{a^2} = 16, \quad a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } 100a^2 = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$