2017학년도 대학수학능력시험 대비

2016학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 나형 정답

1	④	2	②	3	④	4	②	5	③
6	③	7	④	8	④	9	①	10	⑤
11	③	12	③	13	⑤	14	①	15	②
16	③	17	⑤	18	①	19	①	20	②
21	②	22	128	23	2	24	33	25	4
26	20	27	256	28	4	29	336	30	16

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$$\left(4^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=4^{\frac{3\times2}{4\times3}}=4^{\frac{6}{12}}$$

$$=4^{\frac{1}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{2}}=2^{2\times\frac{1}{2}}=2^1=2$$

2. [출제의도] 수열의 극한을 계산한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}$ 의 분모와 분자를 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}}{\frac{n}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+4n+3}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\sqrt{4+0+0}=2$$

3. [출제의도] 등비중항의 성질을 이용하여 특정항을 계산한다.

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 $a_4^2=a_2\cdot a_6$

즉, $8^2=4a_6$

따라서 $a_6=16$

4. [출제의도] 드모르간의 법칙을 활용하여 원소의 개수를 계산한다.

전체집합 $U=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$이므로

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

드모르간의 법칙에 의해서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}\cup\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

그러므로

$(A\cup B)^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}^C$

$=\{8,\ 10\}$

따라서 집합 $A^C\cap B^C$의 원소의 개수는 2이다.

5. [출제의도] 로그의 정의를 이해하여 식의 값을 구한다.

$\log_2\dfrac{a}{4}=b$에서 $\dfrac{a}{4}=2^b$

즉, $a=4\times2^b$

따라서 $\dfrac{2^b}{a}=\dfrac{2^b}{4\times2^b}=\dfrac{1}{4}$

6. [출제의도] 일대일함수의 정의를 이해하여 조건에 맞는 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로 4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 $a,\ b$에 대하여 $f(1)=a,\ f(3)=b$로 놓을 수 있다.

$f(1)+f(3)$의 최댓값은 $a+b$의 최댓값과 같다.

그런데 $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$일 때 $a+b$가 최대이다.

따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다.

7. [출제의도] 주변에서 일어나는 상황을 집합의 포함관계로 나타내어 원소의 개수를 구한다.

전체 학생의 집합을 U, 책 A를 읽은 학생의 집합을 책 A, 책 B를 읽은 학생의 집합을 B라 하자.

A를 읽지 않고 B만 읽은 학생의 집합은 $A^C\cap B$

$n(U)=33,\ n(A^C\cap B)=15$

$U=(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B)^C$

이고 두 집합 $A^C\cap B$와 $(A^C\cap B)^C=A\cup B^C$은 서로소이다.

$n(U)=n(A^C\cap B)+n(A\cup B^C)$

$=15+n(A\cup B^C)$

그러므로 $n(A\cup B^C)=18$

그런데 $(A\cap B)\subset(A\cup B^C)$이므로

$n(A\cap B)\le n(A\cup B^C)$

따라서 $n(A\cap B)$의 최댓값은 18이다.

[다른풀이]

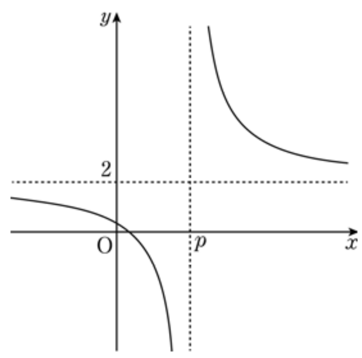
책 A를 읽지 않고 책 B만 읽은 학생 15명은 책 A와 책 B를 모두 읽은 학생의 집합에 속하지 않는다. 전체 학생수가 33명이므로 책 A와 책 B를 모두 읽은 학생의 최댓값은 $33-15=18$

8. [출제의도] 밑변환 공식을 이해하여 식의 값을 구한다.

$7\log a=2\log b$에서 $\dfrac{7}{2}=\dfrac{\log b}{\log a}=\log_a b$

따라서 $\dfrac{8}{21}\log_a b=\dfrac{8}{21}\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{4}{3}$

9. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.



주어진 함수의 그래프는 함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p, y축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x=p,\ y=2$이다.

$p\le0$이면 곡선 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$는 반드시 제3사분면을 지나므로 $p>0$이다.

$x>p$인 범위에서 함수의 그래프는 제1사분면만을 지난다.

$x<p$일 때 주어진 함수의 그래프가 제3사분면을 지나지 않기 위해서는 $x=0$일 때 y의 값은 0이상이 되어야 한다.

그러므로 $\dfrac{5}{-p}+2\ge0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 최소의 정수 p는 3이다.

10. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 수열의 합을 구한다.

이차방정식의 두 근의 합 a_n은 근과 계수의 관계에 의해 $a_n=\dfrac{2n^2-n}{n}=2n-1$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}2k-\sum_{k=1}^{10}1=2\sum_{k=1}^{10}k-10$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}-10=100$$

11. [출제의도] 합성함수의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

함수 $g(x)$는 자연수 x를 4로 나눈 나머지이므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

i) $m=1$인 경우, 함수 $f(x)=x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=g(x)$이다.
그러므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

ii) $m=2$인 경우, 함수 $f(x)=2x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(2x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $2x$가 2의 배수이고 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 2\}$이다.

iii) $m=3$인 경우, 함수 $f(x)=3x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(3x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $3x$는 3의 배수이고 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이다.

iv) $m=4$인 경우, 함수 $f(x)=4x$이므로
합성함수 $(g\circ f)(x)=(4x$를 4로 나눈 나머지$)$이다.
그런데 $4x$가 항상 4의 배수이므로 4로 나눈 나머지는 0이다. 즉, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

이처럼 m이 4의 배수가 아닌 경우에는 치역의 원소의 개수가 2이상이다.

하지만 $m=4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots$과 같이 m이 4의 배수인 경우에는 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

12. [출제의도] 수열의 극한값을 구하는 방법을 이해하여 그 값을 구한다.

직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(3,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=x$이다.

문제에서 $f(2)=4,\ g(2)=2$이므로

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\times2^n}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=4$$

마찬가지로 문제에서 $f(3)=3,\ g(3)=3$이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\times3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times3^n}{2\times3^n}=4$$

따라서 $h(2)+h(3)=8$

13. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 식의 값을 구한다.

점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.

$a_n=3n+1$이므로 $a_2=7,\ a_9=28$

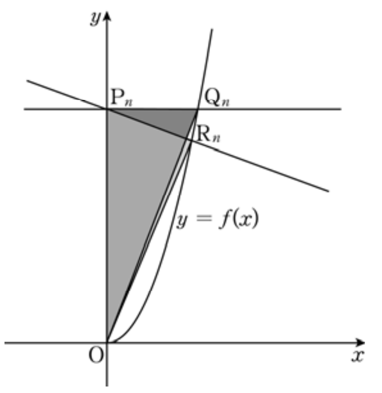
$y=x^2(x\ge0)$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}\ (x\ge0)$이다.

그러므로 $f^{-1}(a_2)=\sqrt{7},\ f^{-1}(a_9)=\sqrt{28}$

따라서 $f^{-1}(a_2)f^{-1}(a_9)=\sqrt{7}\times\sqrt{28}$

$=\sqrt{7\times 28}=\sqrt{196}=14$

14. [출제의도] 수열의 극한값을 구하는 방법을 이해하여 그 값을 구한다.



삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$ 의 넓이 S_n 은

$S_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_n}\cdot\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}$ 이다.

점 R_n 은 곡선 위의 점이고 y 의 좌표가 자연수이므로 자연수 a에 대하여 $(\sqrt{a},\ a)$ 로 놓을 수 있다.

그런데 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$ 의 기울기가 음수이므로

$a<3n+1$

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이가 최대가 되기 위해서는 R_n 의 x 좌표 $\sqrt{a}$ 가 최대일 때이다. 그러므로 $a=3n$ 인 경우이고, 이때 점 R_n 의 좌표는 $(\sqrt{3n},\ 3n)$ 이다.

즉, 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이는

$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_n}\cdot\sqrt{3n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}$ 이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}-\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}\right\}$$

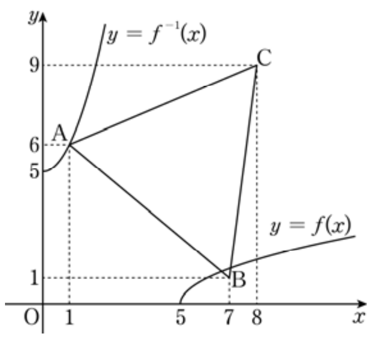
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}\frac{(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

15. [출제의도] 평행이동한 무리함수의 역함수의 그래프를 추측하여 문제를 해결한다.



그림과 같이 k의 값이 증가하면 곡선 $y=\sqrt{x-k}$ 는 점 B를 지난 이후에 삼각형과 만나지 않고 곡선 $y=f(x)$가 점 B를 지날 때 $1=\sqrt{7-k}$ 이므로 k는 6이다.

즉, $k>6$이면 곡선 $y=f(x)$와 삼각형은 만나지 않는다.

또, $y=\sqrt{x-k}$ 의 역함수를 구하면 $y=x^2+k$ $(x\geq 0)$이다.

k의 값이 증가하면 곡선 $y=x^2+k$가 점 A를 지난 이후 삼각형과 만나지 않고 곡선 $y=x^2+k$가 점 A를 지날 때 $6=1^2+k$이므로 k는 5이다.

즉, $k>5$이면 곡선 $y=x^2+k$와 삼각형은 만나지 않는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수의 그래프가 삼각형과 동시에 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 5이다.

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명한다.

수학적 귀납법에 의한 증명이므로 $n=1$일 때 성립함을 증명하고 $n=m$일 때 성립함을 가정하여 $n=m+1$일 때도 성립함을 증명한다.

문제에서 $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하였으므로

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}\quad\cdots㉠$$

또, $\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$은 $k=1$부터 $k=m+1$까지 $(-1)^{k+1}k^2$의 합이므로

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2$에 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$을 합한 것과 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{m+2}(m+1)^2$$

그러므로 $\boxed{(가)}$는 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$이다.

또, 등식 $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$와

㉠에서 $\boxed{(나)}$는 $(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$

그러므로 $f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\cdot\frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$f(5)=(-1)^{5+2}(5+1)^2=-36$

$g(2)=(-1)^{2+1}\cdot\frac{2(2+1)}{2}=-3$ 이다.

따라서 $\frac{f(5)}{g(2)}=\frac{-36}{-3}=12$

17. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.

ㄱ. 삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로 각 FGH는 직각이다. 또, 문제에서 점 M은 선분 FH의 중점이므로 세 점 F, G, H는 중심이 M인 한 원 위에 있다.

그러므로 $\overline{\mathrm{FM}}=\overline{\mathrm{GM}}$ 이다. (참)

ㄴ. 삼각형 AEH와 삼각형 BFE가 합동이므로 $\angle\mathrm{AEH}+\angle\mathrm{BEF}=90^\circ$ 이고, 삼각형 EFH는 직각이등변삼각형이다. 즉, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{a^2+b^2}$

그러므로 삼각형 EFH의 넓이는 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ 이다.

선분 EM은 삼각형 EFH를 이등분하므로 삼각형 EFM의 넓이는 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ 이다. 또한 삼각형 FGH는 직각삼각형이므로 넓이는 ab이고 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.

그러므로 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)\geq\frac{1}{4}(2ab)=\frac{1}{2}ab$ (참)

ㄷ. 선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로 길이는 $\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}$

문제에서 $\overline{\mathrm{FH}}=6\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2}\times\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$ 에서 $a^2+b^2=36$이다.

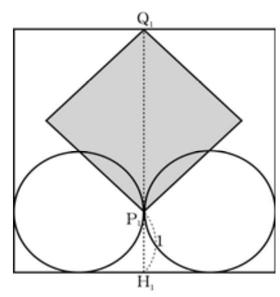
그런데 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고

$36=a^2+b^2\geq 2ab$이므로 $\frac{1}{2}ab\leq 9$

그러므로 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

18. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.

정사각형 R_1의 한 변의 길이를 구하기 위해 점 P_1에서 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형의 한 변에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{H}_1}=1$이므로 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=3$이다.



이때, 피타고라스의 정리에 의해 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

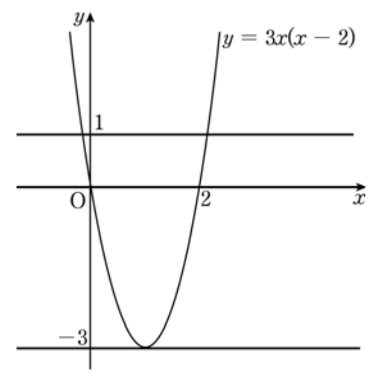
(최초의 정사각형의 한 변의 길이) : (정사각형 R_1의 한 변의 길이) $=4:\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로

수열 $\{l_n\}$의 공비는 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $l_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{3\sqrt{2}}{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{8-3\sqrt{2}}$

$=\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$

19. [출제의도] 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하여 실근의 곱을 구하는 문제를 해결한다.



조건 (가)에 의해

이차함수 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)꼴이다.

조건 (나)에 의해 $ax(x-2)-6(x-2)=0$이므로 $(ax-6)(x-2)=0$이다.

이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-6=0$의 근도 $x=2$이다. 즉, $a=3$이다.

$f(x)=3x(x-2)=3(x-1)^2-3$ 이므로

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점은 $(1,\ -3)$이다.

$f(f(x))=-3$을 만족하기 위해서는 $f(x)=1$이 되어야 함을 그래프에서 알 수 있다.

그러므로 $3x^2-6x=1$에서 $3x^2-6x-1=0$이다.

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에서 $-\frac{1}{3}$ 이다.

20. [출제의도] 절댓값의 성질을 활용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - m < \frac{1}{2}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 = n^2+n+\frac{1}{4}$ 에서

$-\frac{3}{4} < n^2+n-m < \frac{1}{4}$

m, n은 정수이므로 $n^2+n-m=0$이다.

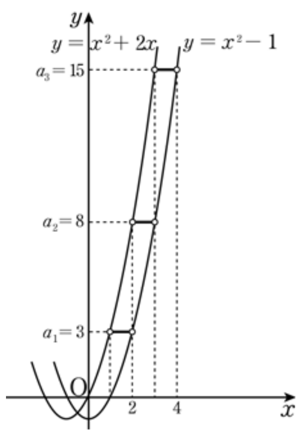
m은 n^2+n이다. 즉, $a_n = n^2+n$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}(k^2+k) = \frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$

$= 55+15 = 70$이다.

21. [출제의도] 집합으로 정의된 부등식의 성질을 이용하여 급수 문제를 해결한다.

두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 1, 2는 $x=1$일 때 $1^2-1=0$과 $1^2+2\times1=3$ 사이의 수이다. 이때 $1\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

그러므로 1, 2는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$일 때, 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$이다. 즉, $a_1=3$

자연수 4, 5, 6, 7은 $x=2$일 때 $2^2-1=3$과 $2^2+2\times2=8$ 사이의 수이다. 이 때 $2\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다. 따라서 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$의 둘째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<8<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_2=8$이다.

마찬가지로 자연수 9, 10, 11, 12, 13, 14는 $x=3$일 때 $3^2-1=8$과 $3^2+2\times3=15$ 사이의 수이다. 이 때 $3\in A$이므로 $A\neq\varnothing$이다.

따라서 9, 10, 11, 12, 13, 14는 수열 $\{a_n\}$의 셋째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<15<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $a_3=15$이다.

⋮

위의 과정을 통해 집합 A를 공집합이 되도록 하는 자연수 a는 k^2-1 또는 k^2+2k (k는 자연수)의 값임을 알 수 있다.

그런데 $x=k$ (k는 자연수)일 때 k^2+2k의 값은 $x=k+1$ (k는 자연수)일 때 $(k+1)^2-1$의 값과 같고, $x=1$일 때, $1^2-1=0$은 자연수가 아니므로 $x=k$ (k는 자연수)일 때 k^2+2k인 자연수를 나열하면 된다.

따라서 n번째 나열된 수는 n^2+2n이므로

$a_n = n^2+2n$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-0-0\right) = \frac{3}{4}$

[다른풀이]

$x^2-1<a<x^2+2x$를 정리하면

$x^2<a+1<x^2+2x+1$

$x^2<a+1<(x+1)^2$

$a+1$이 자연수 x에 대해 x^2 또는 $(x+1)^2$이면 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$의 해 중 자연수는 존재하지 않으므로 A가 공집합이다.

이 때, $a+1=k^2$ (k는 2 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{3}{4}$

22. [출제의도] 로그의 정의를 알고 진수를 계산한다.

로그의 정의에 의해 $a=4^{\frac{7}{2}}=(2^2)^{\frac{7}{2}}=2^7=128$이다.

23. [출제의도] 시그마의 정의를 이해하여 일반항을 구한다.

$a_{10} = \sum_{k=1}^{10}a_k - \sum_{k=1}^{9}a_k = 19-17 = 2$

따라서 $a_{10}=2$

24. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 지수를 구한다.

$\sqrt[3]{4^n} = 4^{\frac{n}{3}} = 2^{\frac{2n}{3}}$이 정수가 되기 위해서는 $\frac{2n}{3}$이 자연수이어야 하므로 n은 3의 배수이다. n은 100 이하의 자연수이고, 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 33이다.

따라서 n의 개수는 33이다.

25. [출제의도] 집합을 이해하여 부등식의 해를 구한다.

$x^2-x-12\le0$에서 $(x+3)(x-4)\le0$이므로

$-3\le x\le4$

그러므로 $A=\{x\mid -3\le x\le4\}$

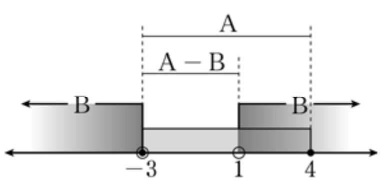
조건 (가)에서 $A\cup B=R$이므로

$a\ge-3$이고 $b\le4$이다.

또, $A-B=A\cap B^C$이고 $B^C=\{x\mid a\le x\le b\}$이다.

ⅰ) $a>-3$인 경우 집합 $A\cap B^C$의 원소 중 가장 작은 수는 a이므로 $A-B=\{x\mid -3\le x\le1\}$을 만족시키지 않는다.
그러므로 $a=-3$이다.

ⅱ) $b\le4$인 경우 집합 $A\cap B^C$의 원소 중 가장 큰 수는 b이므로 $A-B=\{x\mid -3\le x\le1\}$을 만족시키기 위한 b의 값은 1이다.
두 조건을 만족시키는 두 집합의 관계를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 $a=-3$, $b=1$이므로 $b-a=4$이다.

26. [출제의도] 꼭짓점의 위치가 변함에 따라 무게중심이 수렴할 좌표를 추론한다.

두 실수 α, β에 대해 $\mathrm{P}_n\left(\alpha,\ \frac{\alpha}{n}+1\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(\beta,\ \frac{\beta}{n}+1\right)$이라 하면 α, β는

방정식 $x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}=\frac{1}{n}x+1$의 두 근이다.

$x^2-\left(4+\frac{2}{n}\right)x+\frac{4}{n}-1=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=4+\frac{2}{n}$이다.

한편 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 무게중심의 y좌표

$a_n = \frac{1}{3}\left(0+\frac{\alpha}{n}+1+\frac{\beta}{n}+1\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}+2\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{4+\frac{2}{n}}{n}+2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$

따라서

$30\lim_{n\to\infty}a_n = 30\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$

$= 10(0+0+2) = 20$이다.

27. [출제의도] 명제와 진리집합의 관계를 이해하여 두 진리집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

$x^2\le2x+8$에서 $(x+2)(x-4)\le0$이므로

$-2\le x\le4$

$P\subset U$이므로 $P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

명제 $\sim p\to r$가 참이므로 대우명제인 $\sim r\to p$도 참이다. 그러므로

$\sim r\Rightarrow p$에서 $R^C\subset P$, $p\Rightarrow q$에서 $P\subset Q$

집합 Q는 집합 P를 포함하므로 가능한 집합 Q의 개수는 2^4이다.

ⅰ) $n(R^C)=0$인 경우
$R^C=\varnothing$이므로 $R=U$이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.

ⅱ) $n(R^C)=1$인 경우
$R^C=\{1\}$이면 $R=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.
R^C이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times4$이다.

ⅲ) $n(R^C)=2$인 경우
$R^C=\{1,\ 2\}$이면 $R=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.
R^C이 $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{3,\ 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times6$이다.

ⅳ) $n(R^C)=3$인 경우
$R^C=\{1,\ 2,\ 3\}$이면 $R=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.
R^C이 $\{1,\ 2,\ 4\}$, $\{1,\ 3,\ 4\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times4$이다.

ⅴ) $n(R^C)=4$인 경우
$R^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이면 $R=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4\times1$이다.

ⅰ) ~ ⅴ)에 의해서 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$2^4+4\times2^4+6\times2^4+4\times2^4+2^4=16\times2^4=256$이다.

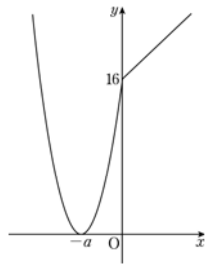
28. [출제의도] 합성함수의 성질을 이해하여 주어진 식의 미정계수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

합성함수 $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2+2ax+16 & (x<0)\\ x+16 & (x\ge0)\end{cases}$이다.

$a\le0$이면

합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\mid y\ge16\}$이므로 문제의 치역과 달라 $a>0$이어야 한다.

$y=x^2+2ax+16$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 음수이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 치역이 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이기 위해서는 꼭짓점의 y 좌표가 0 이다.



$y=x^2+2ax+16=(x+a)^2+16-a^2$ 에서

$16-a^2=0$, $a=\pm 4$

$a>0$ 이므로 $a=4$

29. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합의 원소를 구하는 문제를 해결한다.

$n(P \cap A)=2$ 에서 집합 A 에 속한 4 개의 원소 중 오직 2 개만 집합 P 에 속한다. 즉, 집합 A 의 원소 중 집합 P 에 속하는 원소들의 합의 최댓값은 $3+4=7$, 최솟값은 $1+2=3$ 이다.

그러므로 집합 A 에 속하지 않는 원소들의 합은 21 이상 25 이하이다. ⋯ ㉠

$P-B=\varnothing$ 에서 $P \subset B$ 이고 집합 B 의 원소 중 집합 A 에 속하는 원소를 제외한 나머지 원소들의 집합은 $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 이다.

i) $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 이 집합 P 에 포함되는 경우 원소의 합은 26 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

ii) $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 의 부분집합 중 세 원소로 이루어진 집합이 집합 P 에 포함되는 경우 원소의 합의 최솟값은 $5+6+7=18$, 최댓값은 $6+7+8=21$ 이므로 ㉠을 만족시키는 집합은 $\{6,\ 7,\ 8\}$ 이고 (다)에 의해 $\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 는 집합 P 가 될 수 있다.

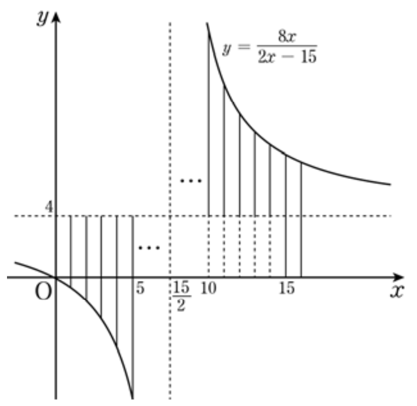
iii) $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 의 부분집합 중 두 원소로 이루어진 집합은 ㉠을 만족시키지 않는다.

i) ~ iii)에 의해 $P=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 이고 $P-A=\{6,\ 7,\ 8\}$ 이다.

따라서 $P-A$ 의 모든 원소의 곱은 336 이다.

30. [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 주어진 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $f(x)=4+\dfrac{60}{2x-15}$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\dfrac{15}{2},\ 4\right)$ 에 대해 대칭이므로

$f(7)+f(8)=8$, $f(6)+f(9)=8$,

$f(5)+f(10)=8$, $f(4)+f(11)=8$,

$f(3)+f(12)=8$, $f(2)+f(13)=8$,

$f(1)+f(14)=8$

에서 $\sum_{n=1}^{14} a_n = f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)=56$

또, $a_{15}=f(15)=8$

$a_{16}=f(16)=4+\dfrac{60}{2\times 16-15}=7+\dfrac{9}{17}<8$

$a_{17}=f(17)>4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{16} a_n < 73 < \sum_{n=1}^{17} a_n$ 이다.

따라서 m 의 최댓값은 16 이다.