제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $\left(4^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=4$, $a_4=8$일 때, a_6의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

4. 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 집합 $A^C \cap B^C$의 원소의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 양수 a에 대하여 $\log_2 \frac{a}{4} = b$일 때, $\frac{2^b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수를 $f(x)$라 하자. $f(2) = 4$일 때, $f(1) + f(3)$의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 어느 고등학교 3학년 1반 학생 33명을 대상으로 책 A, 책 B를 읽었는지 조사하였다. 책 A를 읽지 않고 책 B만 읽은 학생이 15명일 때, 책 A와 책 B를 모두 읽은 학생 수의 최댓값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

8. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $7\log a = 2\log b$일 때, $\frac{8}{21}\log_a b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

9. 유리함수 $y = \frac{5}{x-p} + 2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. x에 대한 이차방정식 $nx^2 - (2n^2 - n)x - 5 = 0$의 두 근의 합을 a_n(n은 자연수)라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

11. 두 집합 $A=\{x|x$는 자연수$\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 두 함수 $f:A\rightarrow A$, $g:A\rightarrow B$가

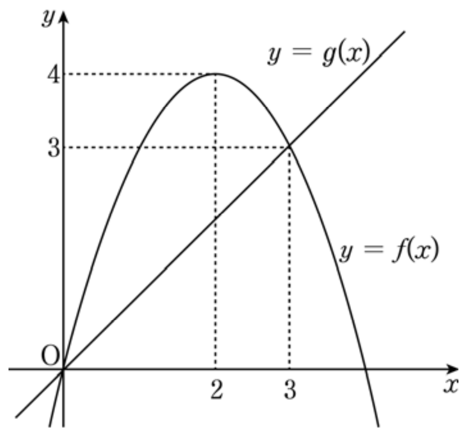
$f(x)=mx$

$g(x)=(x$를 4로 나눈 나머지$)$

이다. 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은? [3점]

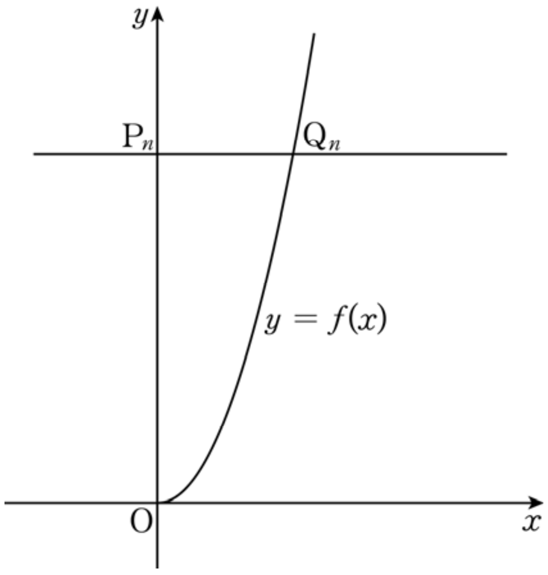
① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

12. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3, 3)$에서 만난다. $h(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n+\{g(x)\}^n}$ 일 때, $h(2)+h(3)$의 값은? [3점]



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[13 ~ 14] 자연수 n에 대하여 좌표가 $(0, 3n+1)$인 점을 P_n, 함수 $f(x)=x^2(x \geq 0)$이라 하자. 점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 할 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 점 Q_n의 y좌표를 a_n이라 할 때, $f^{-1}(a_2) \cdot f^{-1}(a_9)$의 값은? [3점]

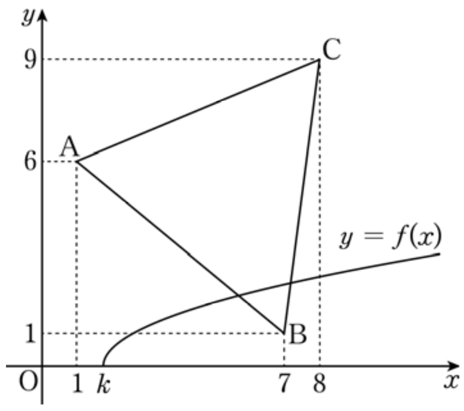
① $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ② 7 ③ $7\sqrt{2}$ ④ $7\sqrt{3}$ ⑤ 14

14. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 R_n은 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$의 기울기가 음수이고 y좌표가 자연수인 점이다. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이가 최대일 때 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$의 값은?
(단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

수학 영역(나형)

15. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$ 에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$ 와 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(7,\ 1)$, $\mathrm{C}(8,\ 9)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 와 함수 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC 와 만나도록 하는 실수 k 의 최댓값은? [4점]



① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\ \cdots\cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변) $=(-1)^2\times1^2=1$

(우변) $=(-1)^2\times\dfrac{1\times2}{2}=1$

따라서 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}$$
$$=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}$$
$$=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

이다.

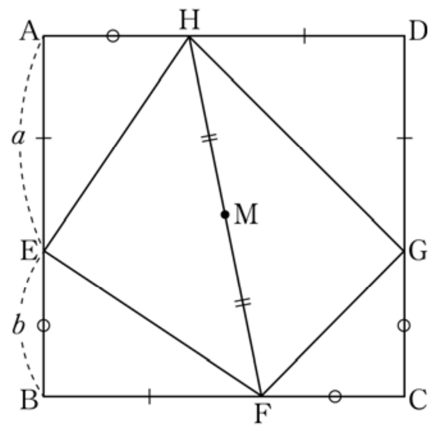
따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{f(5)}{g(2)}$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

17. 두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 ABCD의 네 변 AB, BC, DC, DA를 각각 $a:b$로 내분하는 점을 E, F, G, H라 하고, 선분 FH의 중점을 M이라 하자. 그림은 위의 설명과 같이 그린 한 예이다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\overline{\mathrm{FM}} = \overline{\mathrm{GM}}$

ㄴ. $\triangle\mathrm{EFM} \geq \triangle\mathrm{FGM}$

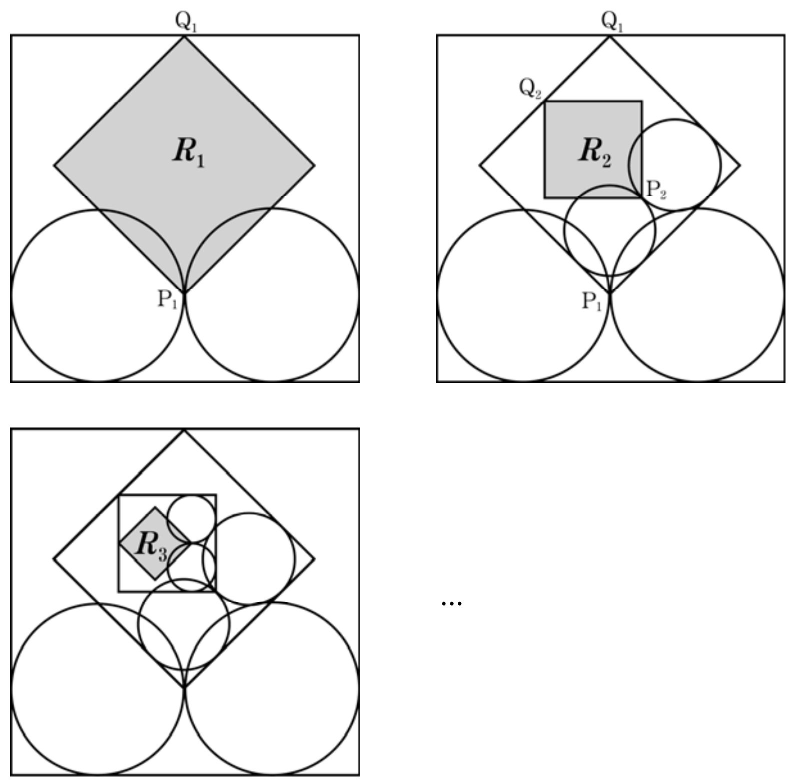
ㄷ. $\overline{\mathrm{FH}}=6\sqrt{2}$ 일 때, 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 한 변의 길이가 4인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2인 두 원이 서로 한 점 P_1에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$을 대각선으로 하는 정사각형 R_1을 그린다. 이때, R_1의 한 변의 길이를 l_1이라 하자.

지름이 $\frac{l_1}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_2에서 만나고 정사각형 R_1의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_1의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2라 하고, 선분 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$를 대각선으로 하는 정사각형 R_2를 그린다. 이때, R_2의 한 변의 길이를 l_2라 하자.

지름이 $\frac{l_2}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_3에서 만나고 정사각형 R_2의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3이라 하고, 선분 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$을 대각선으로 하는 정사각형 R_3을 그린다. 이때, R_3의 한 변의 길이를 l_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그린 정사각형 R_n의 한 변의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}$ ② $\frac{24(2+\sqrt{2})}{23}$ ③ $\frac{12(1+4\sqrt{2})}{23}$
④ $\frac{3(3+2\sqrt{2})}{7}$ ⑤ $\frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$

수학 영역(나형)

19. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(2)=0$
(나) 이차방정식 $f(x)-6(x-2)=0$의 실근의 개수는 1이다.

방정식 $(f\circ f)(x)=-3$의 서로 다른 실근을 모두 곱한 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

20. 자연수 n에 대하여

$$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$$

을 만족시키는 자연수 m을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [4점]

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

집합 $A=\{x \mid x^2-1<a<x^2+2x,\ x$는 자연수$\}$

가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

예를 들어, $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1=3$이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

단답형

22. $\log_4 a=\frac{7}{2}$일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2n-1$을 만족시킬 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

24. 100 이하의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[3]{4^n}$이 정수가 되도록 하는 n의 개수를 구하시오. [3점]

25. 실수 전체의 집합 R의 두 부분집합

$$A=\{x|x^2-x-12\le 0\},\ B=\{x|x<a \text{ 또는 } x>b\}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cup B=R$
(나) $A-B=\{x|-3\le x\le 1\}$

두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오. [3점]

26. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}$와 직선 $y=\frac{1}{n}x+1$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $30\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

27. 전체집합 $U=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 조건 '$p: x^2 \le 2x+8$'의 진리집합을 P, 두 조건 q, r의 진리집합을 각각 Q, R라 하자. 두 명제 $p \to q$와 $\sim p \to r$가 모두 참일 때, 두 집합 Q, R의 순서쌍 (Q, R)의 개수를 구하시오. [4점]

28. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x \ge 0) \end{cases}, \quad g(x)=x+10$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y \ge 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

수학 영역(나형)

29. 두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

에 대하여 집합 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(P\cap A)=2$
(나) $P-B=\varnothing$
(다) 집합 P의 모든 원소의 합은 28이다.

집합 $P-A$의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]

30. 유리함수 $f(x)=\dfrac{8x}{2x-15}$ 와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=f(n)$이다. $\sum_{n=1}^{m} a_n \le 73$ 을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.