2016학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나 형]

1	④	**2**	③	**3**	①	**4**	②	**5**	④
6	③	**7**	③	**8**	①	**9**	⑤	**10**	⑤
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	②	**15**	⑤
16	②	**17**	④	**18**	⑤	**19**	④	**20**	①
21	②	**22**	8	**23**	121	**24**	3	**25**	15
26	80	**27**	27	**28**	210	**29**	725	**30**	56

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$4\times 16^{\frac{1}{4}}=4\times(2^4)^{\frac{1}{4}}=4\times 2=8$

2. [출제의도] 집합의 원소의 개수 계산하기

$A-B=\{3,9,15\}$이므로 원소의 개수는 3

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n-1}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{9}{2}$$

4. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_b a=\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\dfrac{54}{9}=6$

5. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r라 할 때,

$\dfrac{a_{10}}{a_2}=\dfrac{80}{5}$에서 $\dfrac{a_1r^9}{a_1r}=16$

$r^8=16$이므로 $r^4=4$

따라서 $\dfrac{a_5}{a_1}=\dfrac{a_1r^4}{a_1}=r^4=4$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=1$에서 연속이다.

$f(1)=2-a$이고 $\displaystyle\lim_{x\to1-}(ax-4)=\lim_{x\to1+}(2x-a)$이므로

$a-4=2-a$

$\therefore\ a=3$

7. [가형 6번과 동일]

8. [출제의도] 명제 추론하기

세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하자.

명제 $p\to\sim q$가 참이므로 대우 $q\to\sim p$도 참이다.

그러므로 $Q\subset P^C$이고 명제 $r\to q$가 참이므로 $R\subset Q$

따라서 $R\subset Q\subset P^C$이 성립하므로 $R\subset P^C$이다.

$\therefore$ 명제 $r\to\sim p$가 항상 참이다.

9. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$이므로 $x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)=0$

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=-2$

-27의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=-27$이므로 $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$x=-3$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ b=-3$

그러므로

$a-b=2-(-3)=5$ 또는 $a-b=-2-(-3)=1$

따라서 $a-b$의 최댓값은 5

10. [출제의도] 순열 이해하기

홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자를 택하여 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$

11. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3a_n-\frac{1}{4}\right)=4$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3a_n-\frac{1}{4}\right)=0$

$3a_n-\dfrac{1}{4}=b_n$이라 하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$a_n=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{12}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{12}$

12. [출제의도] 명제 추론하기

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$\sim p$는 q이기 위한 필요조건이므로

$Q\subset P^C\Leftrightarrow P\subset Q^C$

$P=\{x\mid a\le x\le a+2\},\ Q^C=\{x\mid 5\le x\le 9\}$

$\therefore\ P\subset Q^C$을 만족시키는 정수 a의 값은 5, 6, 7

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 18

13. [출제의도] 무리함수 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=-\sqrt{x-2}+2$의 그래프는

함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 $m=4,\ n=2$

따라서 $m+n=6$

14. [출제의도] 함수의 극한 문제해결하기

점 $\mathrm{P}(a,a)$를 지나고 x축에 평행한 직선 $y=a$와 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}(a^2-2,a)$, $\mathrm{B}(a^2-4a+6,a)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=(a^2-4a+6)-(a^2-2)=-4a+8$

점 B를 지나고 y축에 평행한 직선 $x=a^2-4a+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점은

$\mathrm{C}(a^2-4a+6,\ a^2-4a+6)$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=(a^2-4a+6)-a=a^2-5a+6$

$$\text{따라서 }\lim_{a\to2-}\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\lim_{a\to2-}\frac{a^2-5a+6}{-4a+8}=\lim_{a\to2-}\frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)}=\lim_{a\to2-}\frac{a-3}{-4}=\frac{1}{4}$$

15. [출제의도] 수열의 극한 문제해결하기

$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{n^2+n^4}$

점 $\mathrm{A}_n(n,n^2)$을 지나고 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x+n^2+\sqrt{3}n$이다.

이 직선이 x축과 만나는 점은 $\mathrm{B}_n\left(\dfrac{n^2}{\sqrt{3}}+n,\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OB}_n}=\dfrac{n^2}{\sqrt{3}}+n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OB}_n}}{\overline{\mathrm{OA}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{\sqrt{3}}+n}{\sqrt{n^2+n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

16. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

$\sqrt{3}H_A=2H_B,\ L_A=2L_B$이므로

$$\frac{H_A}{H_B}=\frac{\frac{k}{L_A}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}=\frac{\frac{k}{2L_B}\log\frac{1}{S_A}}{\frac{k}{L_B}\log\frac{1}{S_B}}=\frac{1}{2}\times\frac{\log S_A}{\log S_B}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\dfrac{\log S_A}{\log S_B}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\log_{S_B}S_A=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$S_A=(S_B)^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore\ p=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

17. [출제의도] 함수 이해하기

$f(x)$는 '$2x$를 5로 나눈 나머지'이므로

$f(0)=0,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=3$이다.

함수 $g:X\to X$는 집합 X의 모든 원소 x에 대하여

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시키므로

$(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)$에서 $f(3)=g(2)=1$

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)$에서 $f(1)=g(4)=2$

$(f\circ g)(4)=(g\circ f)(4)$에서 $f(2)=g(3)=4$

$(f\circ g)(0)=(g\circ f)(0)$에서 $f(g(0))=g(0)$

$f(0)=0$이므로 $g(0)=0$ 이어야 한다.

$\therefore\ g(0)+g(3)=0+4=4$

18. [출제의도] 수학적 귀납법 추론하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{4}{3}$, (우변)$=3-\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3}$이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3^2}+\dfrac{12}{3^3}+\cdots+\dfrac{4k}{3^k}=3-\dfrac{2k+3}{3^k}$

이다.

위 등식의 양변에 $\dfrac{4(k+1)}{3^{k+1}}$을 더하여 정리하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{(2k+3)-\left(\boxed{\frac{4k+4}{3}}\right)\right\}$$
$$=3-\frac{1}{3^k}\left(\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}\right)$$
$$=3-\frac{\boxed{2(k+1)+3}}{3^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(1), (2)에 의하여

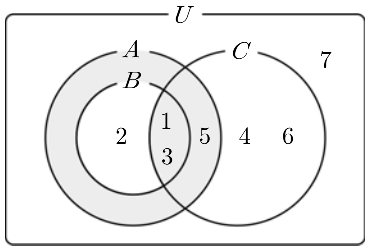
모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$\therefore\ f(k)=\dfrac{4k+4}{3},\ g(k)=2(k+1)+3$

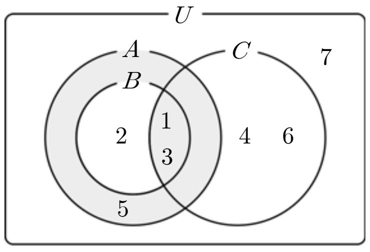
따라서 $f(3)\times g(2)=\dfrac{16}{3}\times 9=48$

19. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

주어진 조건을 만족하는 집합 $A,\ B,\ C$를 벤 다이어그램으로 나타내면



또는



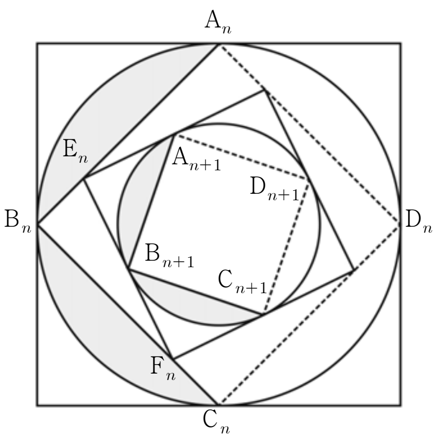
따라서 $A\cap(B^C\cup C)=\{1,3,5\}$

20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서

$S_1=2\times\left(\dfrac{1}{4}\times 2^2\times\pi-\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\right)=2(\pi-2)$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



그림에서 $\overline{A_nB_n}=a$라 하자. 두 선분 A_nB_n, B_nC_n을 각각 $3:1$로 내분하는 두 점을 E_n, F_n이라 하면,

$\overline{B_nE_n}=\dfrac{1}{4}a,\ \overline{B_nF_n}=\dfrac{3}{4}a$

$\overline{E_nF_n}=\sqrt{\left(\overline{B_nE_n}\right)^2+\left(\overline{B_nF_n}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a$

$\therefore\ \overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{E_nF_n}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}a=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\overline{A_nB_n}$

두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이고, 닮음비는 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이다.

그러므로 그림 R_n에서 새로 얻어진 모양의 도형과 그림 R_{n+1}에서 새로 얻어진 모양의 도형도 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2(\pi-2)$이고 공비가 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{5}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{2(\pi-2)}{1-\dfrac{5}{16}}=\dfrac{32}{11}(\pi-2)$

21. [출제의도] 수열의 극한 문제해결하기

집합 S_n의 부분집합 중 원소의 개수가 두 개인 집합에 대하여 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 임의의 두 원소를 $a,\ b(a<b)$라 하자.

$b-a>2n$이므로 $b>a+2n$ (단, $1\le a<b\le 3n$)

$a=1$일 때, $b=2n+2,\ 2n+3,\ \cdots,\ 3n$

$\{1,2n+2\},\ \{1,2n+3\},\ \cdots,\ \{1,3n\}$: $(n-1)$개

$a=2$일 때, $b=2n+3,\ 2n+4,\ \cdots,\ 3n$

$\{2,2n+3\},\ \cdots,\ \{2,3n\}$: $(n-2)$개

$\vdots$

$a=n-1$일 때, $b=3n$

$\{n-1,3n\}$: 1개

$n\le a<3n$일 때, b는 없으므로 0개

그러므로 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 집합 S_n의 모든 부분집합의 개수 a_n은

$a_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k(k-1)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}=\dfrac{n^3-n}{6}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\times\dfrac{n^3-n}{6}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{6}=\dfrac{1}{6}$

22. [가형 2번과 동일]

23. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{6}(k^2+5)=\sum\limits_{k=1}^{6}k^2+\sum\limits_{k=1}^{6}5$

$=\dfrac{6\times7\times13}{6}+5\times6=121$

24. [출제의도] 합성함수 이해하기

$f(5)=\dfrac{4}{5-1}+4=5$

$\therefore\ (g\circ f)(5)=g(f(5))=g(5)=\sqrt{5+4}=3$

25. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-3}=b$에서 $\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}-3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to9}(x-a)=9-a=0$

$\therefore\ a=9$

$\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9}$

$=\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=6=b$

$\therefore\ b=6$

따라서 $a+b=15$

26. [출제의도] 등차수열 이해하기

세 실수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면, $a=b-d,\ c=b+d$

(가)에서 $\dfrac{2^a\times2^c}{2^b}=2^{a+c-b}=2^{(b-d)+(b+d)-b}=2^b=32$

$\therefore\ b=5$

(나)에서 $a+c+ca$

$=(5-d)+(5+d)+(5+d)(5-d)$

$=35-d^2=26$

$\therefore\ d=\pm3$

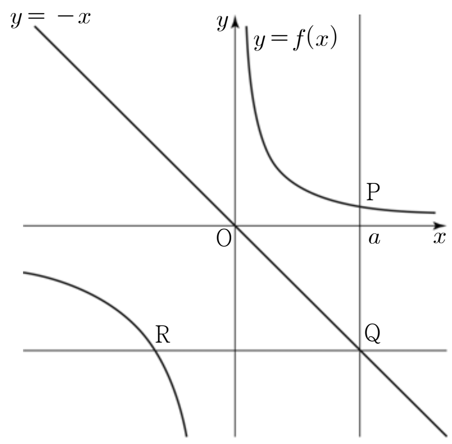
그러므로 $a=2,\ b=5,\ c=8$ 또는 $a=8,\ b=5,\ c=2$

따라서 $abc=80$

27. [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 P의 x의 좌표를 a라 하자.

(ⅰ) $a>0$일 때,



$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{3}{a}\right),\ \mathrm{Q}(a,\ -a),\ \mathrm{R}\left(-\dfrac{12}{a},\ -a\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=a+\dfrac{3}{a},\ \overline{\mathrm{QR}}=a+\dfrac{12}{a}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\left(a+\dfrac{3}{a}\right)\left(a+\dfrac{12}{a}\right)=a^2+\dfrac{36}{a^2}+15$

$\ge 2\sqrt{a^2\times\dfrac{36}{a^2}}+15=27$

등호가 성립하는 경우는 $a^2=\dfrac{36}{a^2}$, 즉 $a=\sqrt{6}$일 때이다.

그러므로 $a=\sqrt{6}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 27을 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때,

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{12}{a}\right),\ \mathrm{Q}(a,\ -a),\ \mathrm{R}\left(-\dfrac{3}{a},\ -a\right)$이므로

(ⅰ)에서와 같이

$a=-\sqrt{6}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$는 최솟값 27을 갖는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}$의 최솟값은 27

28. [가형 28번과 동일]

29. [출제의도] 수열의 합 문제해결하기

기울기가 1이고 y절편이 양수인 원 $x^2+y^2=\dfrac{n^2}{2}$의 접선의 방정식은 $y=x+\dfrac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1^2}$

$\therefore\ y=x+n$

직선 $y=x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A_n(-n,0)$, $B_n(0,n)$이고,

점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 $y=-2x-2n$이므로 $C_n(0,-2n)$

삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은

$n=1$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 4,

x좌표가 -1인 점의 개수는 1이므로

$a_1=1+4=5$

$n=2$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 7,

x좌표가 -1인 점의 개수는 4,

x좌표가 -2인 점의 개수는 1이므로

$a_2=1+4+7=12$

$n=3$일 때, x좌표가 0인 점의 개수는 10,

x좌표가 -1인 점의 개수는 7,

x좌표가 -2인 점의 개수는 4,

x좌표가 -3인 점의 개수는 1이므로

$a_3=1+4+7+10=22$

$\vdots$

$\therefore\ a_n = 1 + \{4 + 7 + 10 + \cdots + (3n+1)\}$

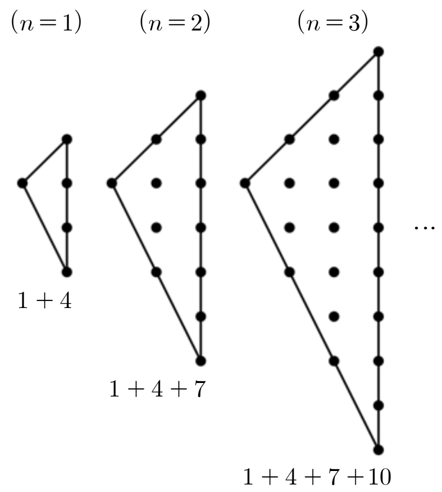
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}(3k+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{5}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10$$

$$= 725$$



30. [출제의도] 함수의 연속 문제해결하기

주어진 이차함수 $f(x)$는 축의 방정식이 $x=4$이고 (가)에서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$f(0) = a > 0,\ f(2) = a - 12 < 0$

$\therefore\ 0 < a < 12$

(나)에서

$f(a)g(a) = 7a^2(a-7)$,

$$\lim_{x \to a+} f(x)g(x) = \lim_{x \to a+}\left(x^2 - 8x + a\right)(2x + 5a)$$

$$= 7a^2(a-7),$$

$$\lim_{x \to a-} f(x)g(x) = \lim_{x \to a-}\left(x^2 - 8x + a\right)f(x+4)$$

$$= \left(a^2 - 8a + a\right)\{(a+4)^2 - 8(a+4) + a\}$$

$$= a(a-7)\left(a^2 + a - 16\right)$$

이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$7a^2(a-7) = a(a-7)\left(a^2 + a - 16\right)$

$a(a-7)(a-8)(a+2) = 0$

$\therefore\ a = 7$ 또는 $a = 8$ ($\because\ 0 < a < 12$)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 56