

수학 영역(나형)

제 2 교시

1

1. $4 \times 16^{\frac{1}{4}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

2. 두 집합 $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $B = \{6, 12, 18\}$ 에 대하여 집합 $A - B$ 의 원소의 개수는? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n-1}{2n+5}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

4. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_2 a = 54$, $\log_2 b = 9$ 일 때, $\log_b a$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 5$, $a_{10} = 80$ 일 때,

$\frac{a_5}{a_1}$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

7. 자연수 8을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax - 4 & (x < 1) \\ 2x - a & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

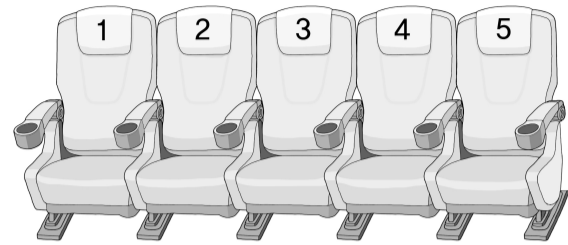
8. 세 조건 p, q, r 에 대하여 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $r \rightarrow q$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은? [3점]

- ① $r \rightarrow \sim p$ ② $p \rightarrow r$ ③ $q \rightarrow p$
 ④ $q \rightarrow \sim r$ ⑤ $\sim r \rightarrow p$

9. 16의 네제곱근 중 실수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, $a-b$ 의 최댓값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

10. 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 5명의 가족이 있다. 이 가족이 그림과 같이 번호가 적힌 5개의 의자에 모두 앉을 때, 아버지와 어머니가 모두 홀수 번호가 적힌 의자에 앉는 경우의 수는? [3점]



- ① 28 ② 30 ③ 32
 ④ 34 ⑤ 36

11. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3a_n - \frac{1}{4}\right) = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은?

[3점]

① $\frac{1}{12}$

② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{2}$

12. 실수 x 에 대하여 두 조건 p, q 가

$$p : a \leq x \leq a+2$$

$$q : x < 5 \text{ 또는 } x > 9$$

이다. $\sim p$ 는 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은? [3점]

① 14

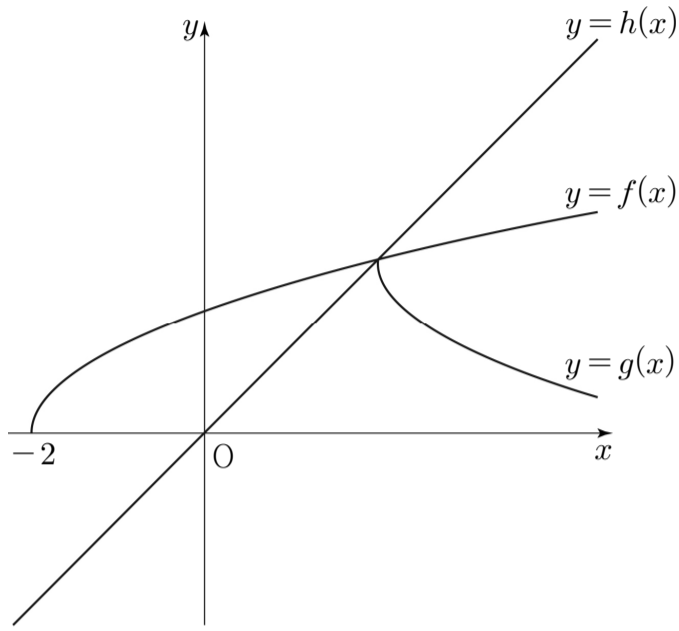
② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

[13~14] 세 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=-\sqrt{x-2}+2$, $h(x)=x$ 의 그래프가 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. 두 상수 m, n 의 합 $m+n$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

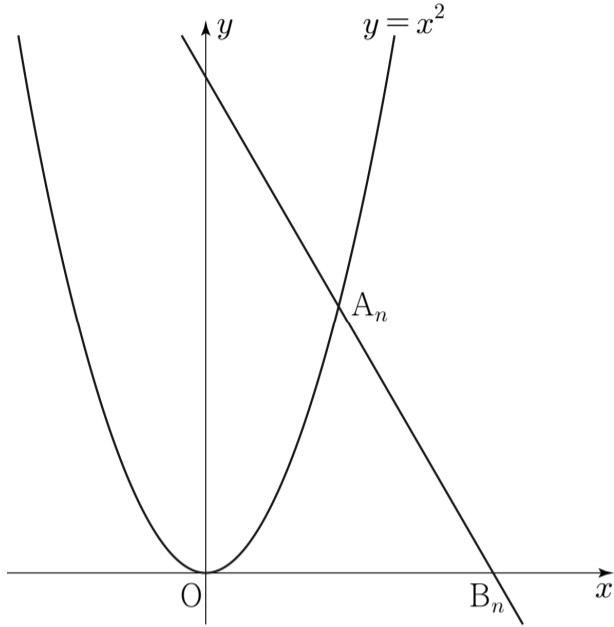
14. 함수 $y=h(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(a, a)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 의 값은? (단, $0 < a < 2$) [4점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

6

수학 영역(나형)

15. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $A_n(n, n^2)$ 을 지나고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선이 x 축과 만나는 점을 B_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OB_n}}{\overline{OA_n}}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. 어떤 지역의 먼지농도에 따른 대기오염 정도는 여과지에 공기를 여과시켜 헤이즈계수를 계산하여 판별한다. 광화학적 밀도가 일정하도록 여과지 상의 빛을 분산시키는 고형물의 양을 헤이즈계수 H , 여과지 이동거리를 $L(m)$ ($L > 0$), 여과지를 통과하는 빛전달률을 S ($0 < S < 1$)라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$H = \frac{k}{L} \log \frac{1}{S} \quad (\text{단, } k \text{는 양의 상수이다.})$$

두 지역 A, B 의 대기오염 정도를 판별할 때, 각각의 헤이즈계수를 H_A, H_B , 여과지 이동거리를 L_A, L_B , 빛전달률을 S_A, S_B 라 하자. $\sqrt{3}H_A = 2H_B, L_A = 2L_B$ 일 때, $S_A = (S_B)^p$ 을 만족시키는 실수 p 의 값은? [4점]

- ① $\sqrt{3}$
- ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- ③ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
- ④ $2\sqrt{3}$
- ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

17. 집합 $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 의 모든 원소 x 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)$ 는 '2x를 5로 나눈 나머지'로 정의하고, X 에서 X 로의 함수 $g(x)$ 는 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족시킨다.
 $g(1) = 3$ 일 때, $g(0) + g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n} \dots\dots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 1$ 일 때, (좌변) = $\frac{4}{3}$, (우변) = $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n = k$ 일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2k+3}{3^k}$$

이다.

위 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$ 을 더하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4k}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} \\ &= 3 - \frac{1}{3^k} \left\{ (2k+3) - \boxed{\text{(가)}} \right\} \\ &= 3 - \frac{\boxed{\text{(나)}}}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 (*)이 성립한다.

(1), (2)에 의하여

모든 자연수 n 에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(3) \times g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 36 ② 39 ③ 42
 ④ 45 ⑤ 48

19. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 7 \text{이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $B \subset A$ 이고 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이다. $A - B = \{5\}, B - C = \{2\}, C - A = \{4, 6\}$ 일 때, 집합 $A \cap (B^c \cup C)$ 는? [4점]

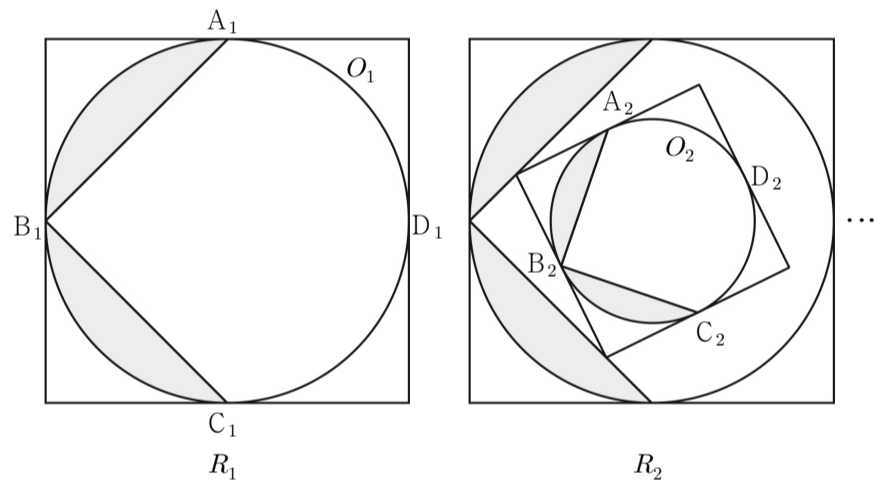
- ① $\{5\}$ ② $\{1, 7\}$ ③ $\{3, 5\}$
 ④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{1, 2, 3, 5, 7\}$

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형에 내접하는 원 O_1 이 있다. 정사각형과 원 O_1 의 접점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1 이라 할 때, 원 O_1 과 두 선분 A_1B_1, B_1C_1 로 둘러싸인 \llcorner 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 선분 A_1B_1, B_1C_1 을 각각 3:1로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 원 O_1 의 내부에 그린다. 이 정사각형에 내접하는 원을 O_2 라 하고 그 접점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2 라 할 때, 원 O_2 와 두 선분 A_2B_2, B_2C_2 로 둘러싸인 \llcorner 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 두 선분 A_2B_2, B_2C_2 를 각각 3:1로 내분하는 두 점을 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형에 그림 R_1 에서 그림 R_2 를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어진 \llcorner 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{32}{11}(\pi - 2)$ ② $\frac{34}{11}(\pi - 2)$ ③ $\frac{36}{11}(\pi - 2)$
 ④ $\frac{32}{11}(\pi - 1)$ ⑤ $\frac{34}{11}(\pi - 1)$

21. 자연수 n 에 대하여 집합 $S_n = \{x | x \text{는 } 3n \text{이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$ 보다 큰 원소로만 이루어진 모든 집합의 개수를 a_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

단답형

22. ${}_n P_2 = 56$ 일 때, 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\sum_{k=1}^6 (k^2 + 5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 1보다 큰 모든 실수의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \frac{4}{x-1} + 4, \quad g(x) = \sqrt{x+4}$$

에 대하여 $(g \circ f)(5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-a}{\sqrt{x}-3} = b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 세 실수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 다음 조건을 만족시킬 때, abc 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \frac{2^a \times 2^c}{2^b} = 32$$

$$(나) a+c+ca = 26$$

27. 좌표평면 위에

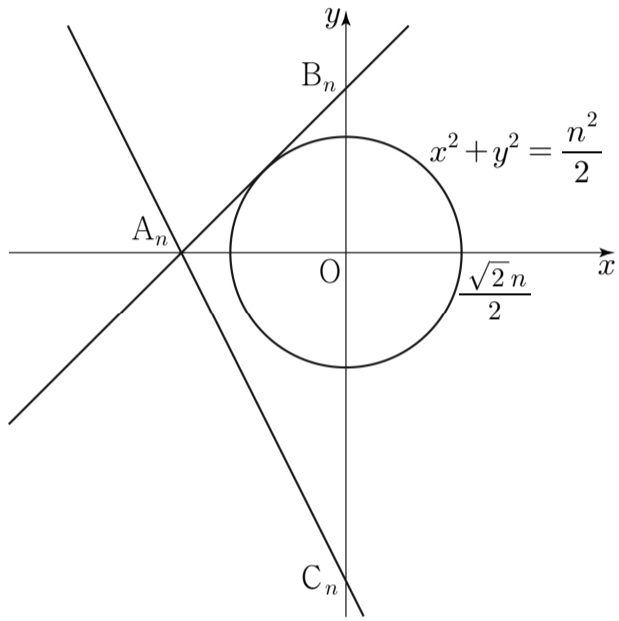
$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & (x > 0) \\ \frac{12}{x} & (x < 0) \end{cases} \text{의 그래프와 직선 } y = -x \text{가 있다.}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 P를 지나고 x 축에 수직인 직선이 직선 $y = -x$ 와 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나고 y 축에 수직인 직선이 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 R라 할 때, 선분 PQ와 선분 QR의 길이의 곱 $\overline{PQ} \times \overline{QR}$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $x + y + z + w = 18$
 (나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

29. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 기울기가 1이고 y 절편이 양수인 직선이 원 $x^2 + y^2 = \frac{n^2}{2}$ 에 접할 때, 이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 점 A_n 을 지나고 기울기가 -2 인 직선이 y 축과 만나는 점을 C_n 이라 할 때, 삼각형 $A_n C_n B_n$ 과 그 내부의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 함수 $f(x) = x^2 - 8x + a$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱을 구하시오. [4점]

- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
- (나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.