2016학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역•

정 답

1	①	2	④	3	⑤	4	①	5	①
6	②	7	③	8	④	9	①	10	②
11	③	12	④	13	④	14	⑤	15	④
16	②	17	⑤	18	⑤	19	③	20	③
21	②	22	7	23	36	24	34	25	27
26	25	27	54	28	32	29	12	30	394

해 설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(2x^2+3xy+1)-(2x^2+2xy-3)$
$=xy+4$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$(4+2i)+(1-3i)=(4+1)+(2-3)i$
$=5-i$

3. [출제의도] 나머지 계산하기

$f(x)=x^3-ax+6$이라 하면
$f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지 $f(1)=0$이다.
따라서 $f(1)=1-a+6=0$이므로 $a=7$이다.

4. [출제의도] 이차부등식 이해하기

해가 $-1<x<5$이고 이차항의 계수가 1인 이차부등식을 구하면
$(x+1)(x-5)<0$
$x^2-4x-5<0$
이므로 $a=-4$, $b=-5$이다.
따라서 $ab=20$이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

등식을 정리하면 $x^2+(a-1)x-a=bx^2-3x+2$
이고, 항등식의 성질에 의해
$a=-2$, $b=1$
이다.
따라서 $a+b=-1$이다.

[다른풀이]
등식 $(x-1)(x+a)=bx^2-3x+2$의 양변에
$x=0$을 대입하면 $-a=2$이므로 $a=-2$이다.
$x=1$을 대입하면 $b-1=0$이므로 $b=1$이다.
따라서 $a+b=-1$이다.

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

$2016=x$라 하면

$$\frac{2016^3+1}{2016^2-2016+1}=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1=2017$$

이다.

7. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$|x-a|<5$의 해는 $a-5<x<a+5$이므로
정수 x의 최댓값이 12가 되기 위해서는
$12<a+5\le 13$ 즉, $7<a\le 8$이다.
따라서 정수 a의 값은 8이다.

8. [출제의도] 인수분해 이해하기

$x^2-x=t$라 두면

$$\begin{aligned}(x^2-x)^2+2x^2-2x-15&=t^2+2t-15\\&=(t+5)(t-3)\\&=(x^2-x+5)(x^2-x-3)\end{aligned}$$

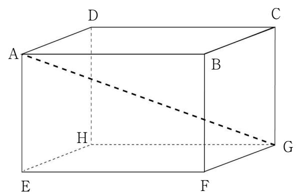
이므로
$a=-1$, $b=5$, $c=-3$
또는
$a=-1$, $b=-3$, $c=5$
이다.
따라서 $a+b+c=1$이다.

9. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법에 의하여
$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)=0$이다.
주어진 삼차방정식의 두 허근 α, β는
이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이므로
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$
이다. 따라서 $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=6$
이다.

10. [출제의도] 곱셈공식 이용하여 도형 문제 해결하기



이웃하는 세 모서리의 길이를 각각 a, b, c라 하자
$\overline{AG}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13}$이므로
$a^2+b^2+c^2=13$
이다.
모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)=20$이므로
$a+b+c=5$
이다.
따라서 직육면체의 겉넓이는

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca)&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=25-13\\&=12\end{aligned}$$

이다.

11. [출제의도] 연립방정식 이해하기

주어진 연립일차방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases}x+y=8\cdots\cdots①\\ y-z=2\cdots\cdots②\\ z-x=4\cdots\cdots③\end{cases}$$

①−②에서
$x+z=6\cdots\cdots④$
이다.
③+④에서
$2z=10$ 즉, $z=5$이므로
②와 ③에 대입하면
$x=1$, $y=7$
이다.
따라서 $a=1$, $b=7$, $c=5$이므로
$abc=1\times7\times5=35$이다.

12. [출제의도] 사차방정식 이해하기

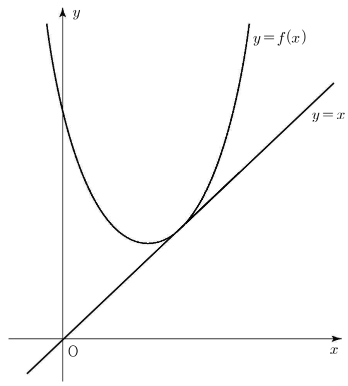
$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 1 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

조립제법에 의하여

$$\begin{aligned}x^4-5x^3+5x^2+5x-6&=(x+1)(x-1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)=0\end{aligned}$$

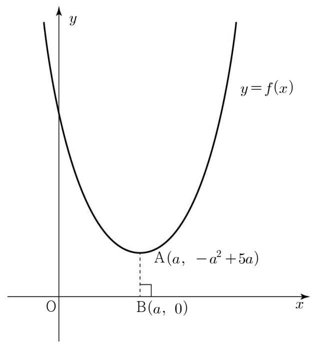
이므로 해는 -1, 1, 2, 3이다.
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=3$이므로 $\beta-\alpha=4$이다.

13. [출제의도] 이차함수와 직선과의 위치관계 이해하기



이차함수 $y=x^2-2ax+5a$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프가 오직 한 점에서 만나므로
$x^2-2ax+5a=x$가 중근을 가져야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2-(2a+1)x+5a=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(2a+1)^2-20a$
$=4a^2-16a+1=0$
이다.
근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 a의 값의 합은 4이다.

14. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 최대최소 문제 해결하기



$y=x^2-2ax+5a$
$=(x-a)^2-a^2+5a$이므로 $\mathrm{A}(a,\ -a^2+5a)$이다.
따라서 $0<a<5$이므로 $\overline{OB}=a$, $\overline{AB}=-a^2+5a$이다.
$\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$라 하면
$g(a)=-a^2+6a$이다.
따라서 $g(a)=-(a-3)^2+9$이므로
$0<a<5$에서 $\overline{OB}+\overline{AB}$의 최댓값은 9이다.

정답 및 해설

15. [출제의도] 복소수 이해하기

$z^2 = z \cdot z = -i$

$z^3 = z^2 \cdot z = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4 = (z^2)^2 = -1$

$z^5 = z^4 \cdot z = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}i}$

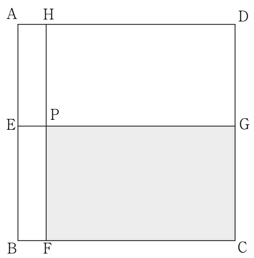
$z^6 = z^4 \cdot z^2 = i$

$z^7 = z^6 \cdot z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8 = (z^4)^2 = 1$

따라서 $z^n = 1$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

16. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식 문제해결하기



$\overline{\mathrm{AH}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{AE}} = \beta$라 하면
$\overline{\mathrm{PG}} = 10-\alpha$, $\overline{\mathrm{PF}} = 10-\beta$이다.
직사각형 PFCG의 둘레의 길이는
$2(10-\alpha)+2(10-\beta) = 28$이므로
$\alpha+\beta = 6$이다.
직사각형 PFCG의 넓이는
$(10-\alpha)(10-\beta) = 46$이므로
$\alpha\beta = 6$이다.
따라서 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$에서
$x^2-6x+6 = 0$이다.

17. [출제의도] 복소수의 성질 추론하기

ㄱ. z^2-z는 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

ㄴ. $z = a+bi\,(b \neq 0)$에 대하여

$z^2-z = a^2+2abi-b^2-a-bi$
$\quad = (a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이고

z^2-z가 실수이고, $b \neq 0$이므로 $a = \dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $z = \dfrac{1}{2}+bi$이고 $\bar{z} = \dfrac{1}{2}-bi$이므로

$z+\bar{z} = 1$이다. (참)

ㄷ. $z = \dfrac{1}{2}+bi$이고 $\bar{z} = \dfrac{1}{2}-bi$이므로

$z\bar{z} = \dfrac{1}{4}+b^2$이고 $b \neq 0$이므로 $z\bar{z} > \dfrac{1}{4}$이다. (참)

<참고> ㄴ은 다음과 같은 두 방법으로 풀 수도 있다.

(1) $\overline{z^2-z}$가 실수이고, $\overline{z^2-z} = (\bar{z})^2-\bar{z}$이므로
$z^2-z = (\bar{z})^2-\bar{z}$가 성립한다.
$z^2-z-\{(\bar{z})^2-\bar{z}\} = 0$에서
인수분해하면
$(z-\bar{z})(z+\bar{z}-1) = 0$이고
z는 실수가 아니므로 $z \neq \bar{z}$이다.
따라서 $z+\bar{z} = 1$이다. (참)

(2) $z^2-z = k$(단, k는 실수)라 하면 $(\bar{z})^2-\bar{z} = k$이므로
z, $\bar{z}$는 이차방정식 $x^2-x-k = 0$의 두 근이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\bar{z} = 1$이다. (참)

18. [출제의도] 이차함수를 이용하여 통합교과적 문제해결하기

행성 A와 A의 위성 사이의 거리와 행성 B와 B의 위성 사이의 거리를 각각 r_A, r_B라 하면

$$r_A = 45r_B \cdots\cdots ①$$

이다.
행성 A의 위성의 공전 속력과 행성 B의 위성의 공전 속력을 각각 v_A, v_B라 하면

$$v_A = \frac{2}{3}v_B \cdots\cdots ②$$

이다.
①과 ②에 의해

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{r_A {v_A}^2}{G} \\ &= \frac{45r_B\left(\frac{2}{3}v_B\right)^2}{G} \\ &= 20 \times \frac{r_B {v_B}^2}{G} \\ &= 20M_B \end{aligned}$$

이다.
따라서 $\dfrac{M_A}{M_B} = 20$이다.

19. [출제의도] 실수의 성질을 이용하여 이차방정식 문제해결하기

$2+\sqrt{3}$은 방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c = 0$의 한 근이므로
$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c = 0$이다.
정리하면 $(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3} = 0$이고
a, b, c가 유리수이므로
$7a+3b+c = 0$, $4a+2b = 0$이다. 따라서

$$b = -2a,\ c = -a$$

이다.
그러므로 주어진 방정식은
$a(x^2-2\sqrt{3}x-1) = 0$이고
이 이차방정식의 두 근은 $x = \sqrt{3} \pm 2$이다.
따라서 $\beta = -2+\sqrt{3}$이므로
$a+\dfrac{1}{\beta} = 2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

[다른 풀이1]

$t = \sqrt{3}x$라 두면 주어진 방정식은
$\dfrac{a}{3}t^2+bt+c = 0$ 즉, $at^2+3bt+3c = 0$이다.
이 방정식은 한 근이 $t = \sqrt{3}(2+\sqrt{3})$
$\quad = 3+2\sqrt{3}$
이고 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은
$t = 3-2\sqrt{3}$이다.
따라서 주어진 방정식의 다른 한 근
$\beta = \dfrac{t}{\sqrt{3}} = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}$이므로
$a+\dfrac{1}{\beta} = 2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

[다른 풀이2]

$\alpha = 2+\sqrt{3}$에서 $\alpha-\sqrt{3} = 2$이고 양변을 제곱하여 정리하면 $\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha-1 = 0$이다.
따라서 α는 이차방정식 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1) = 0$의 근이다.
근과 계수의 관계에 의해 $2+\sqrt{3}+\beta = 2\sqrt{3}$이므로
$\beta = -2+\sqrt{3}$이다.
따라서 $a+\dfrac{1}{\beta} = 2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

<참고> 아래와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

두 유리수 p, q에 대하여
$\overline{p+q\sqrt{3}} = p-q\sqrt{3}$이라 하자.
$f(x) = ax^2+\sqrt{3}bx+c$이라 하고
$\alpha = 2+\sqrt{3}$이라 하면 $f(\alpha) = 0$이다.
즉, $a\alpha^2+\sqrt{3}b\alpha+c = 0$이다.

$\overline{a\alpha^2+\sqrt{3}b\alpha+c} = \bar{0}$
$\overline{a\alpha^2}+\overline{\sqrt{3}b\alpha}+\bar{c} = \bar{0}$
$\bar{a}\bar{\alpha}^2+\overline{\sqrt{3}}\,\bar{b}\,\bar{\alpha}+\bar{c} = \bar{0}$
$a\bar{\alpha}^2-\sqrt{3}b\bar{\alpha}+c = 0$
$a(-\bar{\alpha})^2+\sqrt{3}b(-\bar{\alpha})+c = 0$
이므로 $f(-\bar{\alpha}) = 0$이다.
따라서 $-\bar{\alpha} = -(2-\sqrt{3})$
$\quad = -2+\sqrt{3}$
은 이 방정식의 다른 한 근이다.
따라서 $\beta = \sqrt{3}-2$이므로
$a+\dfrac{1}{\beta} = 2+\sqrt{3}+\dfrac{1}{-2+\sqrt{3}} = 0$이다.

20. [출제의도] 다항식의 나눗셈 추론하기

$p+q = 1$, $pq = -1$이므로
$p^2+q^2 = (p+q)^2-2pq = 3$이고
$p^4+q^4 = (p^2+q^2)^2-2p^2q^2 = 7$이다.
따라서 $r = 3$, $s = 7$이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{p^8-q^8}{p-q} = (p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q) \\ &= 7 \times 3 \times 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

이므로 $t = 21$이다.
따라서 $r+s+t = 31$이다.

<참고>
x에 대한 다항식 ax^9+bx^8+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어지므로 $ax^9+bx^8+1 = (x^2-x-1)Q(x)$의 꼴로 나타낼 수 있다.
양변에 $x = p$, $x = q$를 각각 대입하면 ①, ②를 얻을 수 있다.
①, ②의 양변에 각각 q^8, p^8을 곱하면
$ap(pq)^8+b(pq)^8 = -q^8$이고
$aq(pq)^8+b(pq)^8 = -p^8$이므로
$pq = -1$을 대입하여 정리하면 ③, ④를 얻을 수 있다.

21. [출제의도] 연립부등식 문제 해결하기

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2 \le mx+n$이므로
$x^2+(m-3)x+n-2 \ge 0$이다.
$x^2+(m-3)x+n-2 = 0$의 판별식을 D라 하면
$D = (m-3)^2-4n+8 \le 0$이다.
따라서

$$4n \ge m^2-6m+17 \cdots\cdots ①$$

이다.
모든 실수 x에 대하여 $mx+n \le x^2-x+4$이므로
$x^2-(m+1)x+4-n \ge 0$이다.
$x^2-(m+1)x+4-n = 0$의 판별식을 D'라 하면
$D' = (m+1)^2-16+4n \le 0$이다.
따라서

$$4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots ②$$

이다.
따라서 ①, ②에 의해

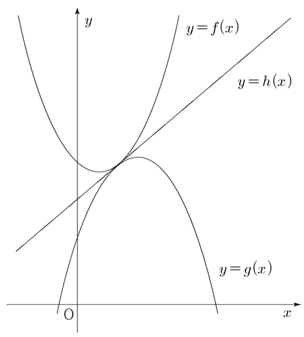
$$m^2-6m+17 \le 4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots ③$$

$m^2-6m+17 \le -m^2-2m+15$
$2m^2-4m+2 \le 0$이다.
$2(m-1)^2 \le 0$이므로 $m = 1$이고
③에서 $12 \le 4n \le 12$이므로 $n = 3$이다.
따라서 $m^2+n^2 = 10$이다.

<참고>
$f(x) = x^2-x+4$, $g(x) = -x^2+3x+2$, $h(x) = mx+n$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하면 된다.
$f(x)-g(x) = 2x^2-4x+2 = 2(x-1)^2$이므로 $y = f(x)$의 그래프와 $y = g(x)$의 그래프는 서로 접한다.
따라서 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하기 위해서는 그림과 같이 $y = h(x)$의 그래프가 $y = g(x)$와 $y = f(x)$의 그래프에 동시에 접해야 한다.
따라서 $f(x) = h(x)$에서
$x^2-(m+1)x+4-n = 0$의 판별식을 D라 하면

$$D = (m+1)^2-4(4-n) = 0 \cdots\cdots ①$$

이다.



$g(x) = h(x)$ 에서

$x^2 + (m-3)x + n - 2 = 0$ 의 판별식을 D'라 하면

$D' = (m-3)^2 - 4(n-2) = 0$ …… ②

이다.

①과 ②를 연립하면 $m = 1$, $n = 3$ 이므로

$m^2 + n^2 = 10$ 이다.

22. [출제의도] 복소수 계산하기

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$a + 2i = 4 + (b-1)i$ 에서

$a = 4$, $b - 1 = 2$ 이다.

따라서 $a = 4$, $b = 3$ 이고

$a + b = 7$ 이다.

23. [출제의도] 다항식 계산하기

곱셈공식에 의하여

$(6x + y - 2z)^2 = 36x^2 + y^2 + 4z^2 + 12xy - 4yz - 24zx$

이므로 x^2 의 계수는 36 이다.

24. [출제의도] 연립부등식 이해하기

부등식 $x - 1 \geq 2$의 해는

$x \geq 3$

이고

$x^2 - 5x = x(x-5) \leq 0$의 해는

$0 \leq x \leq 5$

이다. 그러므로 주어진 연립부등식의 해는

$3 \leq x \leq 5$

이다. 따라서 $\alpha = 3$, $\beta = 5$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = 34$ 이다.

25. [출제의도] 이차방정식 이해하기

α는 이차방정식 $x^2 + 5x - 2 = 0$의 한 근이므로

$\alpha^2 + 5\alpha - 2 = 0$에서

$\alpha^2 = -5\alpha + 2$

이다.

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -5$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 5\beta &= (-5\alpha + 2) - 5\beta \\ &= -5(\alpha + \beta) + 2 \\ &= 27\end{aligned}$$

이다.

26 [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $f(x)$를 $x - 1$로 나눈 몫은 $Q(x)$,

나머지는 5이므로

$f(x) = (x-1)Q(x) + 5$

이다.

$Q(x)$를 $x - 2$로 나눈 나머지는 10이므로

$Q(x) = (x-2)Q'(x) + 10$

이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서 } f(x) &= (x-1)\{(x-2)Q'(x) + 10\} + 5 \\ &= (x-1)(x-2)Q'(x) + 10(x-1) + 5 \\ &= (x-1)(x-2)Q'(x) + 10x - 5\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는 $10x - 5$

이다. 따라서 $a = 10$, $b = -5$이므로

$3a + b = 25$

이다.

27. [출제의도] 이차함수의 성질 추론하기

조건 (가)에서 $f(x) = a(x+2)(x-4)$라 두면

$f(x) = a(x-1)^2 - 9a$이다. (단, a는 상수)

조건 (나)에서

i) $a > 0$이면 $x = 8$에서 최댓값 80을 가지므로

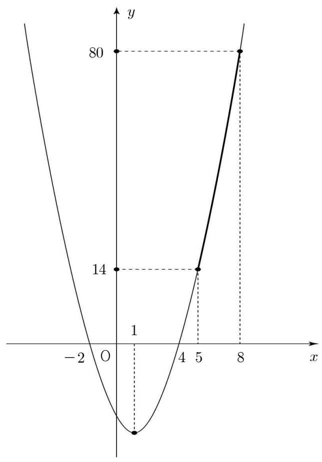
$40a = 80$ 즉, $a = 2$이다.

ii) $a < 0$이면 $x = 5$에서 최댓값 80을 가지므로

$7a = 80$ 즉, $a = \frac{80}{7}$이다. (부적합)

i), ii)에 의해 $a = 2$이다.

따라서 $f(x) = 2(x+2)(x-4)$이고, $f(-5) = 54$이다.



28. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 실생활 문제 해결하기

(단계1)에서 학생 A, B, C가 갖게 된 사탕의 개수는 각각 $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{4}p$이다.

(단계2)에서 학생 A, B, C가 갖게 된 사탕의 개수는 각각 $\frac{1}{3}q$, $\frac{1}{3}q$, $\frac{1}{3}q$이다.

(단계3)에서 학생 A, B, C가 갖게 된 사탕의 개수는 각각 $\frac{3}{8}r$, $\frac{3}{8}r$, $\frac{1}{4}r$이다.

그러므로 학생 A가 갖게 된 사탕의 개수는

$\frac{p}{2} + \frac{q}{3} + \frac{3r}{8} = 14$ …… ①

이고 학생 B가 갖게 된 사탕의 개수는

$\frac{p}{4} + \frac{q}{3} + \frac{3r}{8} = 12$ …… ②

이고 학생 C가 갖게 된 사탕의 개수는

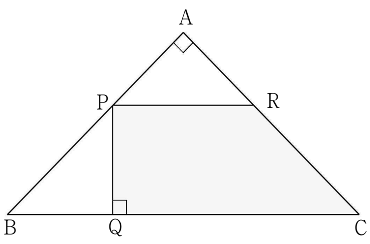
$\frac{p}{4} + \frac{q}{3} + \frac{r}{4} = 10$ …… ③

이다. ①, ②, ③을 연립하면

$p = 8$, $q = 12$, $r = 16$

이다. 따라서 $p + 2q = 32$이다.

29. [출제의도] 이차함수의 성질을 이용하여 도형 문제 해결하기



$\overline{BQ} = a$라 하면 $\triangle$PBQ는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BP} = \sqrt{2}a$이다.

$\triangle$APR는 $\overline{PA} = 6 - \sqrt{2}a$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{PR} = \sqrt{2}(6 - \sqrt{2}a)$이고 $\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{BQ} = 6\sqrt{2} - a$이다.

$$\begin{aligned}\text{따라서 } \square\text{PQCR} &= \frac{1}{2} \times (6\sqrt{2} - 2a + 6\sqrt{2} - a) \times a \\ &= 6\sqrt{2}a - \frac{3}{2}a^2 \\ &= -\frac{3}{2}(a^2 - 4\sqrt{2}a + 8 - 8) \\ &= -\frac{3}{2}(a - 2\sqrt{2})^2 + 12\end{aligned}$$

이다.

따라서 $\overline{BQ} = 2\sqrt{2}$ 일 때,

$\square$PQCR의 넓이의 최댓값은 12이다.

[다른풀이]

$\overline{PA} = 2x$라 하면

삼각형 APR의 넓이는 $2x^2$이다.

$\overline{PB} = 6 - 2x$에서

$\overline{BQ} = \overline{PQ} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}x$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는 $(3-x)^2$이다.

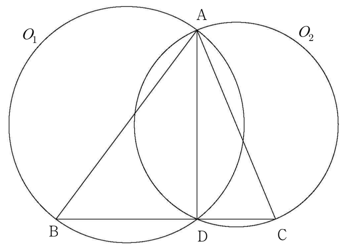
따라서 사각형 PQCR의 넓이가 최대가 되기 위해서는 두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합이 최소가 되어야 한다.

따라서 두 삼각형 APR와 PBQ의 넓이의 합은

$3x^2 - 6x + 9$이므로 $x = 1$일 때, 넓이의 최솟값이 6이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 18이므로 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은 $18 - 6 = 12$이다.

30. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 도형 문제 해결하기



$\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$는 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD} = 2n$, $\overline{AC} = 2n + 2$, $\overline{BC} = 2n + 4$, $\overline{AB} = 2n + 6$ (단, n은 자연수)이라 두자.

$\overline{BD} = x$, $\overline{CD} = y$라 두면

$x + y = 2n + 4$ …… ①

두 삼각형 ABD와 ACD는 직각삼각형이므로

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$이다.

$(2n+6)^2 - x^2 = (2n+2)^2 - y^2$ …… ②

②에서 $8(2n+4) = (2n+4)(x-y)$이므로

$x - y = 8$ …… ③

이다.

①과 ③을 연립하여 풀면

$x = n + 6$, $y = n - 2$

이고 직각삼각형 ACD에서 $(2n+2)^2 = 4n^2 + (n-2)^2$

이다.

이 식을 정리하면 $n^2 - 12n = 0$에서

$n = 12$

이다. 따라서 $\overline{AB} = 30$, $\overline{AC} = 26$이므로

두 원의 넓이의 합 S는

$S = 15^2\pi + 13^2\pi = 394\pi$

이다. 그러므로 $\frac{S}{\pi} = 394$이다.