2016학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[가형] •

정 답

1	③	2	①	3	④	4	⑤	5	③
6	①	7	②	8	⑤	9	②	10	③
11	④	12	④	13	⑤	14	①	15	④
16	③	17	⑤	18	④	19	②	20	①
21	②	22	11	23	2	24	36	25	10
26	432	27	40	28	33	29	24	30	208

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{27}\times 16^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{3^3}\times(4^2)^{\frac{1}{2}}=3\times 4=12$

2. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}=6$$

3. [출제의도] 집합의 원소의 합 계산하기

$U=\{1,2,3,\cdots,8\}$, $A=\{2,4,6,8\}$이므로 $A^C=\{1,3,5,7\}$이다. 따라서 A^C의 모든 원소의 합은 $1+3+5+7=16$이다.

4. [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

등비중항의 성질에 의해 $(a+4)^2=a(a+9)$이므로 $a^2+8a+16=a^2+9a$이다. 따라서 $a=16$이다.

5. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 y축의 방향으로 9만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\sqrt{x+2}+9$의 그래프와 일치하므로 $a=-2$, $b=9$이다. $a+b=-2+9=7$

6. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(3a_n)-(3a_n-b_n)\}$$
$$=3\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=6-4=2$$

7. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_2\frac{8}{n}$과 n이 자연수이므로 $\frac{8}{n}$은 2의 거듭제곱이고 $\frac{8}{n}=2,4,8$ 이다. 따라서 $n=1,2,4$이므로 모든 n의 값의 합은 $1+2+4=7$이다.

8. [출제의도] 부등식의 성질을 이용하여 명제 문제 해결하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이 되기 위해서는 $P\subset Q$이어야 한다. $P=\{x|1-k<x<1+k\}$, $Q=\{x|x\le 6\}$이므로 $P\subset Q$이기 위해서는 $1+k\le 6$, $k\le 5$이다. 따라서 k의 최댓값은 5이다.

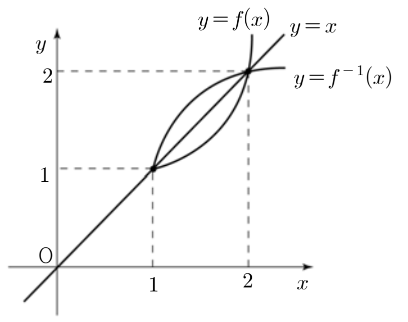
9. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

$y=\frac{3x-14}{x-5}=\frac{3(x-5)+1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+3$이므로 $y=\frac{3x-14}{x-5}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=\frac{1}{x}$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=\frac{3x-14}{x-5}$의 그래프는 $y=(x-5)+3=x-2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $k=-2$이다.

10. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 방정식 문제 해결하기



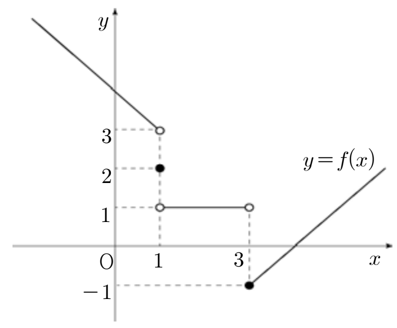
그림과 같이 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다. $x\ge 1$일 때

$x^2-2x+2=x$

$\therefore x=1,\ 2$

따라서 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 $x=1,2$이고 그 합은 3이다.

11. [출제의도] 함수의 극한 이해하기



$\lim_{x\to 1-}f(x)=3$이고, $x\to 2+$일 때, $5-x\to 3-$이므로 $\lim_{x\to 2+}f(5-x)=1$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(5-x)=3+1=4$이다.

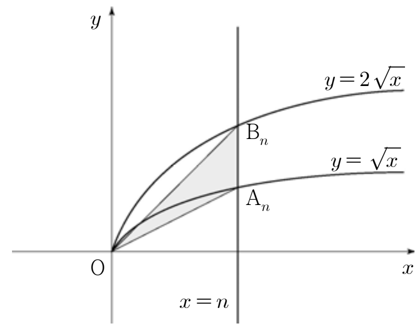
12. [출제의도] 로그의 성질을 이용한 실생활 문제 해결하기

$TL_1=10\log a$, $TL_2=10\log 4$이므로

$\frac{TL_1}{TL_2}=\frac{10\log a}{10\log 4}=\log_4 a=\frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $a=4^{\frac{5}{2}}=2^5=32$이다.

13. [출제의도] 무리함수를 이용하여 지수법칙 문제 해결하기



삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이는 $S(n)=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$이다.

따라서 $S(2^{10})=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^{10}}\right)\times 2^{10}=2^{14}$이므로 $k=14$이다.

14. [출제의도] 무리함수의 성질을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

$a_n=2\sqrt{n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{(n+1)a_n+na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\sum_{n=1}^{80}\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{80}}-\frac{1}{\sqrt{81}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

이다. 따라서 $p+q=8+9=17$이다.

15. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k-6k^2+2\right)=3n^2+5n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1-6+2=8$ $\therefore a_1=12$

(ii) $n\ge 2$일 때,

$$na_n-6n^2+2=\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k-6k^2+2\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(ka_k-6k^2+2\right)$$
$$=3n^2+5n-\{3(n-1)^2+5(n-1)\}$$
$$=6n+2$$

$na_n=6n+2+6n^2-2$

$na_n=6n^2+6n$

$a_n=6n+6$

따라서 $a_n=6n+6\,(n\ge 1)$이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(6n+6)=6\sum_{n=1}^{10}(n+1)$$
$$=6\left(\frac{10\times 11}{2}+10\right)=390$$

16. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

이차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고, $x=2$에서만 불연속이다. 따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서만 연속이면 된다.

$$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}$$
$$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}$$

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x-2}$가 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

따라서 $g(2)=0$이다. 따라서 이차함수 $g(x)$를

$g(x)=(x-2)(x+a)$

라고 하자.

$\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{g(2)}{1}=0$, $\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}=\frac{g(2)}{1}=0$

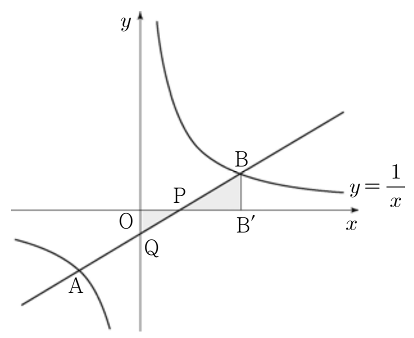
이므로 $\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{x-2}=0$이고

$\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x+a)=2+a=0$이다.

$\therefore a=-2$

따라서 $g(x)=(x-2)^2$이므로 $g(5)=3^2=9$이다.

17. [출제의도] 유리함수를 이용하여 절대부등식 문제 해결하기



두 점 $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}\left(a,\frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$를 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{\frac{1}{a}-(-1)}{a-(-1)}=\frac{\frac{1}{a}+1}{a+1}=\frac{\frac{a+1}{a}}{a+1}=\frac{1}{a}$$

이므로 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{a}(x+1)-1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}-1$$

이다. 따라서 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(a-1,\,0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\,\frac{1}{a}-1\right)$

이고

$\overline{\mathrm{OP}}=a-1$, $\overline{\mathrm{OQ}}=1-\frac{1}{a}$, $\overline{\mathrm{PB'}}=a-(a-1)=1$, $\overline{\mathrm{BB'}}=\frac{1}{a}$

이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times(a-1)\times\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2-2a+1}{2a}=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\frac{a}{2}-1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}+\frac{a}{2}-1\\&\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\times\frac{a}{2}}-1\\&=\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

이므로 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

18. [출제의도] 수열의 성질 추론하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}k(m+1-k)2^{k-1}=(m-2)2^{m+1}+m+4$$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}k(m+2-k)2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}k(m+1-k+1)2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}k(m+1-k)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m+1}k2^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m}k(m+1-k)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m+1}k2^{k-1}\\&=\boxed{(m-2)2^{m+1}}+m+4+\sum_{k=1}^{m+1}k2^{k-1}\end{aligned}$$

이다. 한편 $S=\sum_{k=1}^{m+1}k2^{k-1}$이라고 하면

$$S=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+(m+1)2^m$$

이다.

$$\begin{aligned}S-2S&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^m-(m+1)2^{m+1}\\&=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}-(m+1)2^{m+1}\\&=\boxed{(2^{m+1}-1)}-(m+1)2^{m+1}\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$S=(m+1)2^{m+1}-\boxed{(2^{m+1}-1)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m+1}k(m+2-k)2^{k-1}=(m-1)2^{m+2}+m+5$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$f(m)=(m-2)2^{m+1}$, $g(m)=2^{m+1}-1$이므로

$$\frac{f(15)}{g(15)+1}=\frac{(15-2)2^{16}}{(2^{16}-1)+1}=13\text{이다.}$$

19. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 함수의 그래프 추론하기

$-1<x\le1$일 때, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$이므로

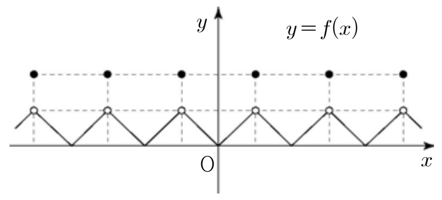
(i) $|x|<1$일 때,

$$f(x)=\frac{0+|x|}{0+1}=|x|$$

(ii) $x=1$일 때,

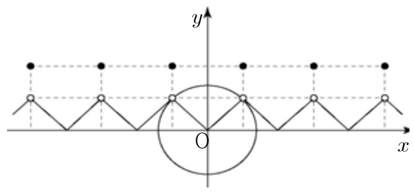
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1}{1+1}=2$$

이고, $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



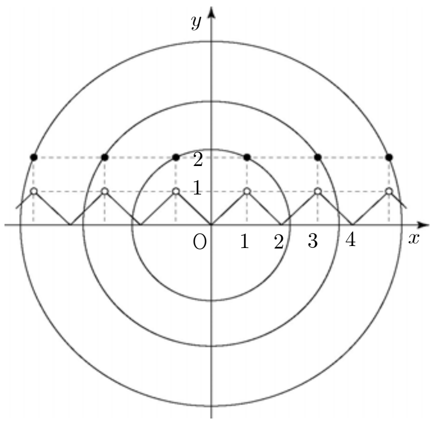
ㄱ. $f(3)=2$ (참)

ㄴ.



원 $x^2+y^2=2$는 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않는다. (참)

ㄷ.



원 $x^2+y^2=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나려면 $(1,2)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $\cdots$을 지나야 한다. 즉, 자연수 n에 대하여 $(2n-1,\,2)$를 지나야 한다. 이때 $(2n-1)^2+2^2=k$이고 $k\le100$이므로

$n=1,\,2,\,3,\,4,\,5$이다.

따라서 100이하의 k의 개수는 5이다. (거짓)

20. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

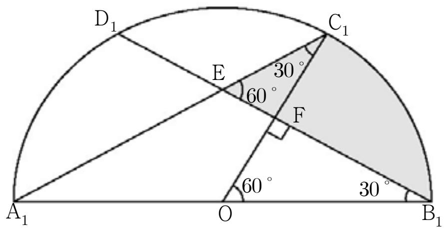


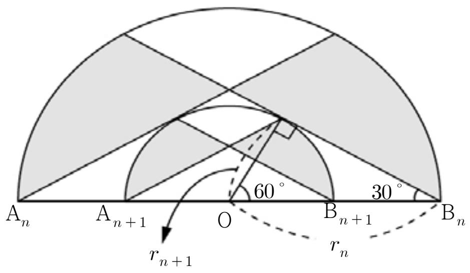
그림 R_1에서 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 $\mathrm{B_1D_1}$의 교점을 E, 두 선분 $\mathrm{OC_1}$과 $\mathrm{B_1D_1}$의 교점을 F라 하자. 삼각형 $\mathrm{OB_1F}$와 삼각형 $\mathrm{C_1EF}$는 세 내각의 크기가 30°, 60°, 90°인 직각삼각형이므로 삼각비에 의해

$\overline{\mathrm{B_1F}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{C_1F}}=1$, $\overline{\mathrm{EF}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이다. S_1은 부채꼴 $\mathrm{OB_1C_1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{C_1EF}$의 넓이를 더한 값에서 삼각형 $\mathrm{OB_1F}$의 넓이를 뺀 값의 2배와 같으므로

$$\begin{aligned}S_1&=\left\{\pi\times2^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\right\}\times2\\&=\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

이다. 그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 새로 얻은  모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$r_{n+1}:r_n=1:2$이므로

$a_{n+1}:a_n=(r_{n+1})^2:(r_n)^2$

$a_{n+1}:a_n=1^2:2^2$

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

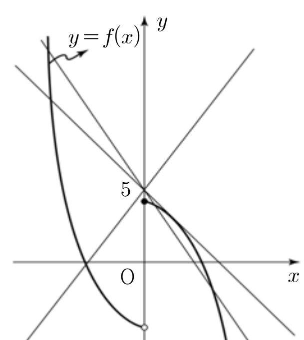
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16\pi-8\sqrt{3}}{9}$$

이다. 그러므로 $a+b=16-8=8$이다.

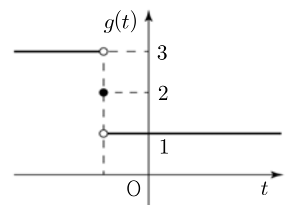
21. [출제의도] 교점의 개수의 규칙성을 이용하여 함수의 연속 추론하기

점 $(0,\,5)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a의 값의 범위에 따라 나타내면 다음과 같다.

(i) $a+7<5\,(a<-2)$일 때

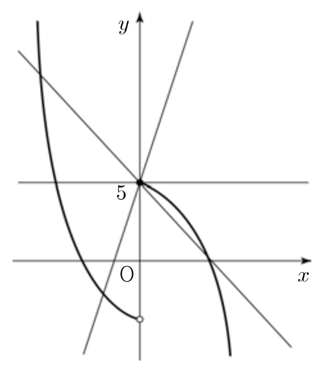


기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2, 3이다. 따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

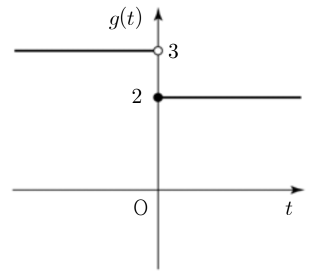


그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(ii) $a+7=5\,(a=-2)$일 때

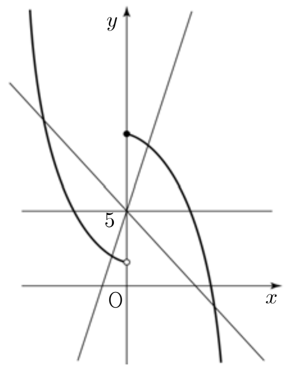


기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 2, 3이다. 따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

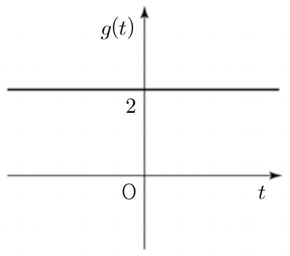


그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(iii) $a-1<5<a+7\,(-2<a<6)$일 때

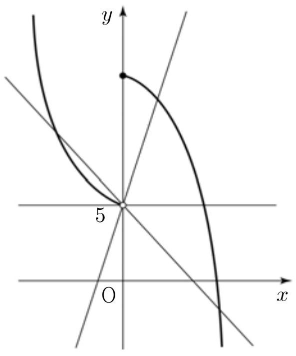


기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 2이다. 따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

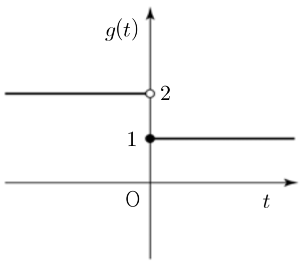


그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iv) $a-1=5\,(a=6)$일 때

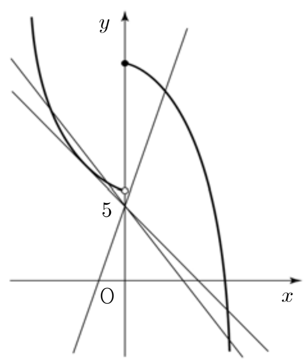


기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2이다. 따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

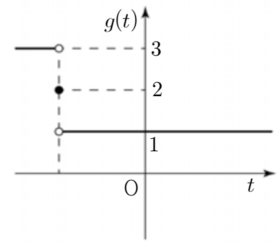


그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(v) $a-1>5\,(a>6)$일 때



기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2, 3이다. 따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다. 따라서 (i)~(v)에서 함수 $g(t)$가 모든 실수 t에 대하여 연속이 되도록 하는 a의 범위는 $-2<a<6$이므로 정수 a는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$이다. 그러므로 그 합은 $-1+0+1+2+3+4+5=14$이다.

22. [출제의도] 등차수열의 일반항 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=5,\ a_2=7$이므로 공차 d는 $d=a_2-a_1=7-5=2$이다.

따라서 $a_4=a_1+3d=5+3\times2=11$이다.

23. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})=\log_2\{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\}$

$=\log_2 4=2$

24. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=1$에 의해서 함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 1이다.

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=5$에서 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

따라서 $f(3)=0$이다. $f(x)=(x-3)(x+a)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+a)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+a)$$
$$=3+a=5$$

$\therefore a=2$

따라서 $f(x)=(x-3)(x+2)$이므로 $f(7)=36$이다.

25. [출제의도] 합성함수의 정의 이해하기

$f(x)=x^2+3,\ g(x)=2x-10$이므로

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(2a-10)=(2a-10)^2+3$

$(2a-10)^2+3=103$

$(2a-10)^2=100$

$2a-10=\pm10$

$a=0, 10$

따라서 양수 a는 10이다.

26. [출제의도] 집합의 성질 이해하기

$A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $A=\{a, b, 4, 6\}$라 하자.

$B=\{x+k\,|\,x\in A\}$이므로 $B=\{a+k,\ b+k,\ 4+k,\ 6+k\}$이다.

(A의 원소의 합)$=a+b+4+6=21$이므로 $a+b=11$

($A\cup B$의 원소의 합)

$=$ (A의 원소의 합)$+$(B의 원소의 합)

$-$($A\cap B$의 원소의 합)

$40=21+(21+4k)-10$

$\therefore k=2$

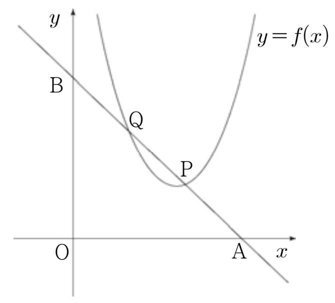
집합 $B=\{6, 8, a+2, b+2\}$에서 $A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $a+2, b+2$ 중의 어느 하나는 4가 되어야 한다.

$a+2=4$이면 $a=2,\ b=9$이고

$b+2=4$이면 $b=2,\ a=9$이다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은 $2\times4\times6\times9=432$이다.

27. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 수열의 극한 문제 해결하기



$\mathrm{A}(n, 0)$, $\mathrm{B}(0, n)$이고 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}n,\ \frac{n}{3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{n}{3},\ \frac{2}{3}n\right)$이다.

이차함수 $f(x)=x^2+a_nx+b_n$라고 하자.

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점이 P, Q이므로 방정식 $x^2+a_nx+b_n=-x+n$의 두 근이 두 점 P, Q의 x좌표이다. 따라서 이차방정식

$x^2+(a_n+1)x+(b_n-n)=0$

의 두 근이 $\frac{n}{3}, \frac{2n}{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$-(a_n+1)=\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}=n,\ b_n-n=\frac{n}{3}\frac{2n}{3}=\frac{2}{9}n^2$

$a_n=-n-1,\ b_n=\frac{2}{9}n^2+n$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9b_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+9n}{-n^2-n}=-2$$

이므로 $k=-2$이고 $10k^2=40$이다.

28. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 실생활 문제 해결하기

수학 문제집 A, B, C를 선택한 집합을 각각 A, B, C라고 하면

$n(A\cap B)=15$, $n(B\cap C)=12$, $n(C\cap A)=11$

$n(A\cup B)=55$, $n(B\cup C)=54$, $n(C\cup A)=51$

이다.

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)=55+15=70$

$n(B)+n(C)=n(B\cup C)+n(B\cap C)=54+12=66$

$n(C)+n(A)=n(C\cup A)+n(C\cap A)=51+11=62$

$n(A)+n(B)+n(C)=99$

$\therefore\ n(A)=99-66=33$

29. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

수열$\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$a_{26}=30$이므로 $a_1+25d=30\cdots$①

$\displaystyle\sum_{n=1}^{13}\{(a_{2n})^2-(a_{2n-1})^2\}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{13}(a_{2n}-a_{2n-1})(a_{2n}+a_{2n-1})$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{13}d(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=d\{(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\cdots+(a_{26}+a_{25})\}$

$=d(a_1+a_2+\cdots+a_{26})$

$=\frac{d\times26(a_1+a_{26})}{2}$

$=13d(a_1+30)=260$

$\therefore d(a_1+30)=20\cdots$②

①, ②에 의해서

$d(30-25d+30)=20$

$25d^2-60d+20=0$

$5d^2-12d+4=0$

$(5d-2)(d-2)=0$

$d=\frac{2}{5}$ 또는 $d=2$

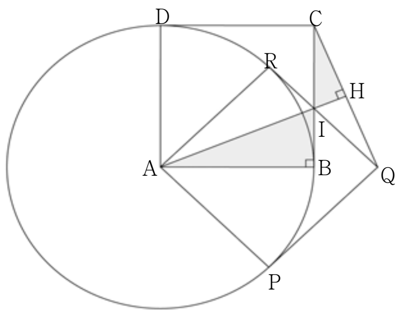
$d=2$이면 $a_1=-20<0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수인 것은 아니다.

따라서 $d=\frac{2}{5}$이고 $a_1=20$이다. 그러므로

$a_{11}=20+10\times\frac{2}{5}=20+4=24$이다.

30. [출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 함수의 극한

문제 해결하기



$\overline{\mathrm{CI}}=t$ 라 하자.

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t \to 0$이다.

점 I에서 선분 QC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABI와 CHI는 닮음이다.

$\overline{\mathrm{BI}}=1-t$, $\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{t^2-2t+2}$

이고 $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{CH}}$이므로 $\sqrt{t^2-2t+2}:1=t:\overline{\mathrm{CH}}$

$\therefore \overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{HI}}$이므로 $\sqrt{t^2-2t+2}:1-t=t:\overline{\mathrm{HI}}$

$\therefore \overline{\mathrm{HI}}=\dfrac{t(1-t)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

이다. 삼각형 IQC에 대하여 S, L을 구해보면

$S=\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}$, $L=2t\dfrac{\sqrt{t^2-2t+2}+1}{\sqrt{t^2-2t+2}}$

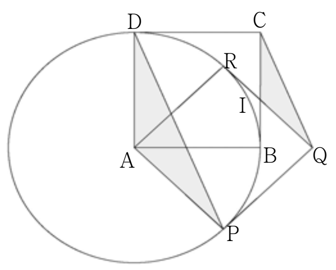
이다. 따라서

$$\lim_{t\to 0}\frac{L^2}{S}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2\times\dfrac{t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}}{t^2-2t+2}}{\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\left(t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{1-t}=12+8\sqrt{2}$$

따라서 $a=12$, $b=8$이므로 $a^2+b^2=144+64=208$이다.

[다른풀이]

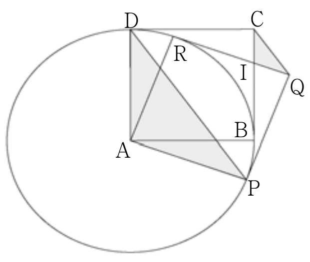


[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle\mathrm{CIQ}=\angle\mathrm{DAP}$, $\overline{\mathrm{IC}}=\overline{\mathrm{IQ}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로 두 삼각형 IQC, APD는 서로 닮음인 도형이다. 따라서

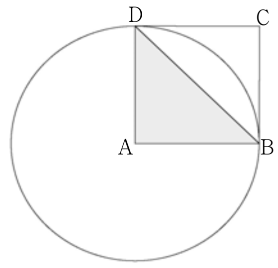
$$\frac{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 넓이})}=\frac{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 넓이})}$$

이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 볼 수 있듯이 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 삼각형 APD는 삼각형 ABD에 한없이 가까워진다.



[그림 3]

[그림 3]에서 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로

$$\frac{(\triangle\mathrm{ABD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{ABD}\text{의 넓이})}=\frac{\left(1+1+\sqrt{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\times1\times1}=12+8\sqrt{2}$$

이다. 그러므로 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\dfrac{L^2}{S}$의 값은 $12+8\sqrt{2}$에 한없이 가까워진다.

따라서 $a=12$, $b=8$이므로 $a^2+b^2=144+64=208$이다.