제 2 교시 수학 영역 (가형)

5지 선다형(1 ~ 21)

1. $\sqrt[3]{27} \times 16^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n-1)}{n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 8이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{2, 4, 6, 8\}$에 대하여 집합 A^C의 모든 원소의 합은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

4. 실수 a에 대하여 세 수 a, $a+4$, $a+9$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

5. 무리함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 무리함수 $y=\sqrt{x+2}+9$ 의 그래프와 일치하였다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty}(3a_n - b_n) = 4$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

7. $\log_2 \dfrac{8}{n}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

8. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

$$p : |x-1| < k, \quad q : x \le 6$$

이다. p는 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 유리함수 $y=\frac{3x-14}{x-5}$ 의 그래프가 직선 $y=x+k$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

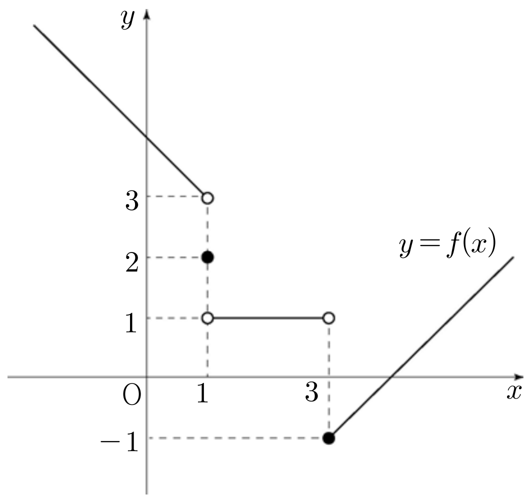
10. 집합 $X=\{x\,|\,x \ge 1\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가

$$f(x) = x^2-2x+2$$

이다. 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 모든 근의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

11. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 1-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(5-x)$ 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

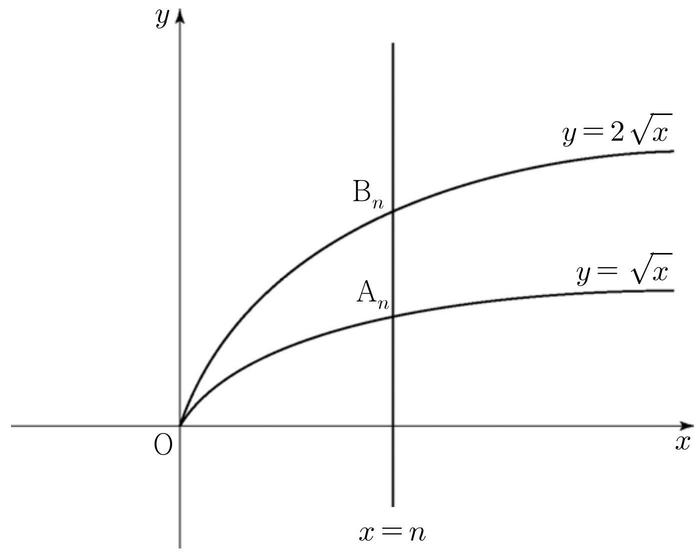
12. 음파가 서로 다른 매질의 경계를 투과하면서 잃어버리는 음파의 에너지의 정도를 나타내는 투과손실을 TL (dB), 입사되는 음파의 에너지를 I, 투과된 음파의 에너지를 T라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$TL = 10\log\frac{I}{T}$$

어떤 음파를 매질 A에서 매질 B로 투과시킬 때, 입사되는 음파의 에너지가 투과된 음파의 에너지의 a배일 때의 투과손실을 TL_1이라 하고, 매질 A에서 매질 C로 투과시킬 때, 입사되는 음파의 에너지가 투과된 음파의 에너지의 4배일 때의 투과손실을 TL_2라 하자. $\frac{TL_1}{TL_2}=\frac{5}{2}$일 때, a의 값은? [3점]

① 8　② 16　③ 24　④ 32　⑤ 40

[13 ~ 14] 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 무리함수 $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. (단, O는 원점이다.)
13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 $S(n)$이라고 할 때, $S(2^{10})=2^k$이다. k의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

14. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 a_n이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{(n+1)a_n+na_{n+1}}=\frac{q}{p}$$

이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(ka_k-6k^2+2\right)=3n^2+5n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

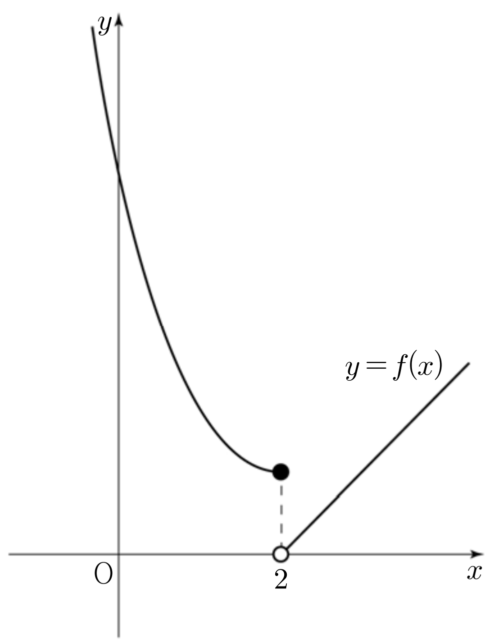
① 375 ② 380 ③ 385 ④ 390 ⑤ 395

16. 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+5 & (x\le 2)\\ x-2 & (x>2)\end{cases}$$

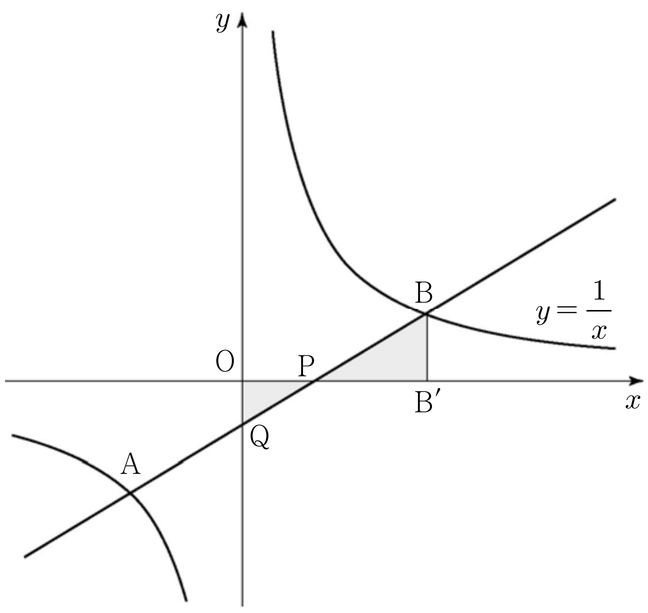
와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11



17. 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\,-1)$, $\mathrm{B}\left(a,\,\frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$를 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′라 할 때, 두 삼각형 POQ, PB′B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}-1$



18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)2^{k-1} = (n-2)2^{n+1}+n+4 \quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>
(1) $n=1$일 때,
(좌변) $=1$, (우변) $=1$이므로 $(*)$이 성립한다.
(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k(m+1-k)2^{k-1} = (m-2)2^{m+1}+m+4$$

이다. $n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1} k(m+1-k)2^{k-1}+\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}$$
$$=\boxed{(가)}+(m+4)+\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}$$

이다. 한편 $S=\sum_{k=1}^{m+1} k2^{k-1}$이라고 하면

$$S=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+(m+1)2^m$$

이다.

$$S-2S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^m-(m+1)2^{m+1}$$
$$=\boxed{(나)}-(m+1)2^{m+1}$$

이므로

$$S=(m+1)2^{m+1}-\boxed{(나)}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(m+2-k)2^{k-1}=(m-1)2^{m+2}+m+5$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(15)}{g(15)+1}$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

19. 함수 $f(x)$가 $-1 < x \le 1$일 때,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(3)=2$

ㄴ. 원 $x^2+y^2=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

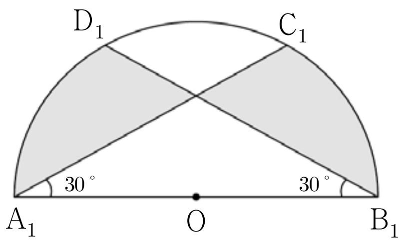
ㄷ. 원 $x^2+y^2=k\,(k>0)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 100이하의 k의 개수는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

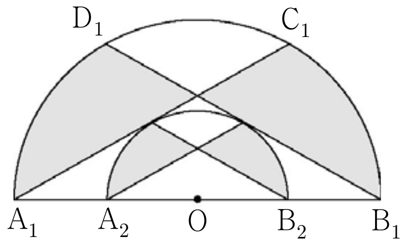
20. 중심이 O이고 길이가 4인 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에 $\angle \mathrm{C_1A_1B_1}=30^\circ$, $\angle \mathrm{D_1B_1A_1}=30^\circ$가 되도록 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{D_1}$을 각각 정하고, 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 두 호 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{A_1D_1}$로 둘러싸인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$에 접하는 원이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 지름으로 하는 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

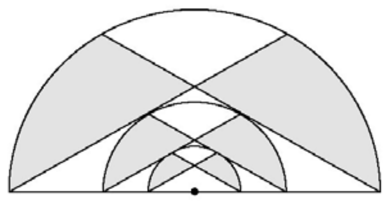
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{9}$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 정수이다.) [4점]



R_1



R_2


R_3

⋯

⋯

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a-1 & (x<0) \\ -x^2+a+7 & (x\ge 0)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 점 $(0,5)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

단답형(22 ~ 30)

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=5$, $a_2=7$일 때, a_4의 값을 구하시오. [3점]

23. $\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})$의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2+2x+3} = 1, \quad \lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3} = 5$$

일 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 함수 $f(x)=x^2+3$, $g(x)=2x-10$에 대하여 $(f \circ g)(a)=103$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

26. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 자연수$\}$의 부분집합 A는 원소의 개수가 4이고, 모든 원소의 합이 21이다. 상수 k에 대하여 집합 $B=\{x+k \mid x \in A\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A \cap B = \{4, 6\}$
(나) $A \cup B$의 모든 원소의 합이 40이다.

집합 A의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]

27. 자연수 n에 대하여 직선 $x+y=n$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB를 1:2로 내분하는 점을 P, 2:1로 내분하는 점을 Q라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 P, Q를 지날 때, 함수 $f(x)$의 일차항의 계수를 a_n, 상수항을 b_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{9b_n}{na_n}=k$이다. $10k^2$의 값을 구하시오. [4점]

28. 어느 고등학교 학생들을 대상으로 수학문제집 A, B, C의 구매 여부에 대하여 조사한 결과가 다음과 같다.

> (가) A와 B를 모두 구매한 학생은 15명, B와 C를 모두 구매한 학생은 12명, C와 A를 모두 구매한 학생은 11명이다.
>
> (나) A와 B 중 적어도 하나를 구매한 학생은 55명, B와 C 중 적어도 하나를 구매한 학생은 54명, C와 A중 적어도 하나를 구매한 학생은 51명이다.

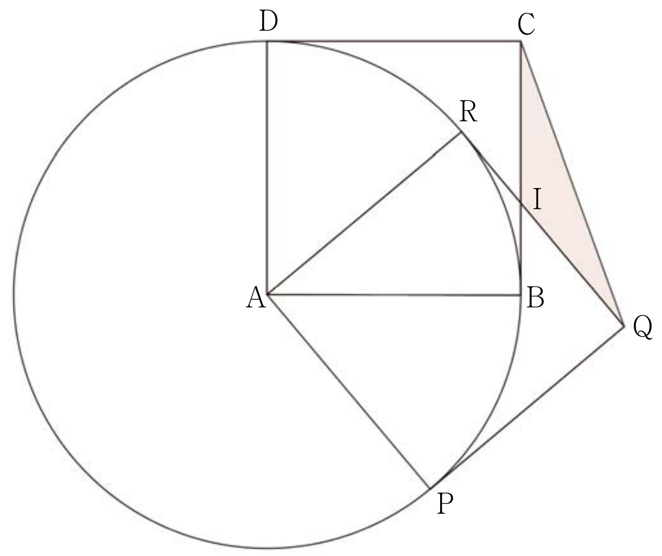
수학문제집 A를 구매한 학생의 수를 구하시오. [4점]

29. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$은

$$a_{26}=30\,,\quad \sum_{n=1}^{13}\left\{(a_{2n})^2-(a_{2n-1})^2\right\}=260$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값을 구하시오. [4점]

30. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A가 중심이고 선분 AB를 반지름으로 하는 원이 있다. 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 사각형 APQR가 정사각형이 되도록 원 위에 점 R와 원의 외부에 점 Q를 잡는다.
그림과 같이 선분 BC와 선분 QR가 만나도록 할 때, 선분 BC와 선분 QR의 교점을 I라 하자. 삼각형 IQC의 둘레의 길이를 L, 넓이를 S라 할 때, 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\dfrac{L^2}{S}$의 값이 $a+b\sqrt{2}$에 한없이 가까워진다.
a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.