수학 영역

정 답

1	②	2	①	3	③	4	⑤	5	③
6	③	7	④	8	②	9	⑤	10	②
11	②	12	③	13	①	14	④	15	③
16	①	17	②	18	④	19	⑤	20	⑤
21	④	22	7	23	11	24	14	25	8
26	22	27	24	28	180	29	20	30	17

해 설

1. [출제의도] 합집합의 원소의 합 계산하기
$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
모든 원소의 합은 15

2. [출제의도] 다항식의 연산 계산하기
$X - A = B$에서
$X = A + B$
$= (2x^2 - 4x - 2) + (3x + 3)$
$= 2x^2 - x + 1$

3. [출제의도] 평행이동한 점의 좌표 계산하기
점 $(2,\ 3)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
점 $(1,\ 5)$이므로 $a = 1$, $b = 5$
따라서 $a + b = 6$

4. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기
$\sqrt{(a-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$
양변을 제곱하면
$a^2 - 4a - 5 = 0$
$(a+1)(a-5) = 0$
$a > 0$ 이므로 $a = 5$

5. [출제의도] 다항식의 인수분해 계산하기
$2x + y = t$라 하면
$(2x+y)^2 - 2(2x+y) - 3$
$= t^2 - 2t - 3$

$=(t+1)(t-3)$
$=(2x+y+1)(2x+y-3)$
즉 $a=2$, $b=1$, $c=-3$
따라서 $a+b+c=2+1+(-3)=0$

6. [출제의도] 항등식 이해하기
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$b=12$
즉
$x^2+3x+2=(x-2)^2+a(x-2)+12$ ······㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$2=4-2a+12$
즉 $a=7$
따라서 $a+b=7+12=19$

7. [출제의도] 두 점을 지나는 직선의 y절편 이해하기
주어진 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=2$
두 점 $(2,\ 2)$, $(4,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{0-2}{4-2}=-1$이므로
$y=-(x-4)$
즉 $y=-x+4$
따라서 y절편은 4
(별해)
주어진 두 직선이 만나는 점을 지나는 직선의
방정식은 상수 k에 대하여
$x-2y+2+k(2x+y-6)=0$ ······㉠
이 직선이 $(4,\ 0)$을 지나므로 ㉠에 대입하면
$k=-3$
구하는 직선의 방정식은 $x+y-4=0$
따라서 y절편은 4

8. [출제의도] 원의 방정식 이해하기
선분 AB를 외분하는 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면
$x=\frac{3\times2-2\times1}{3-2}=4$
$y=\frac{3\times1-2\times3}{3-2}=-3$
즉 $\mathrm{C}(4,\ -3)$
원의 중심은 선분 BC의 중점이므로

$a = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$b = \dfrac{1+(-3)}{2} = -1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -1)$

따라서 $a+b = 3+(-1) = 2$

9. [출제의도] 복소수가 서로 같을 조건 이해하기

주어진 식을 정리하면

$3x^2 - 10xy + (2x^2 - 5x)i = 8 + 12i$

양변의 두 복소수가 서로 같으므로

$\begin{cases} 3x^2 - 10xy = 8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2 - 5x = 12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서

$2x^2 - 5x - 12 = 0$

$(2x+3)(x-4) = 0$

x는 정수이므로 $x = 4$ ……㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$48 - 40y = 8$ 이므로 $y = 1$

따라서 $x + y = 5$

10. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기

이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 9a$ 이고

이차부등식 $f(x) < 0$ 에서

주어진 이차부등식을 만족시키는 해가 없으려면 이차함수 $f(x) = x^2 - 2ax + 9a$ 의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2 - 2ax + 9a = 0$ 의 판별식을 D라 할 때, $\dfrac{D}{4} = a^2 - 9a = a(a-9) \le 0$ 이므로

$0 \le a \le 9$

따라서 정수 a의 개수는 10

11. [출제의도] 필요조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

$P = \{x \mid x \le -2$ 또는 $x \ge 5\}$

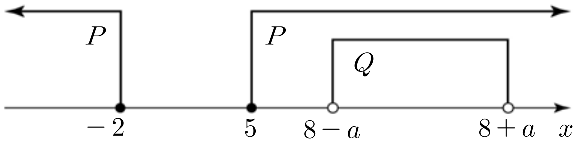
$Q = \{x \mid 8-a < x < 8+a\}$

p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$

$a > 0$ 이므로 $5 \le 8 - a$

즉 $0 < a \le 3$

따라서 자연수 a의 개수는 3



12. [출제의도] 연립부등식의 영역 이해하기

$(x^2-y)(x^2+y-1) \geq 0$에서

$\begin{cases} x^2-y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x^2-y \leq 0 \\ x^2+y-1 \leq 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x^2-y \geq 0 \\ x^2+y-1 \geq 0 \end{cases}$ 의 영역은

이차함수 $y=x^2$의 그래프의 아랫부분(경계선 포함)과 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프의 윗부분(경계선 포함)의 공통부분으로

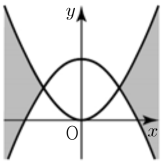
[그림 1]의 어두운 부분이다.

(ii) $\begin{cases} x^2-y \leq 0 \\ x^2+y-1 \leq 0 \end{cases}$ 의 영역은

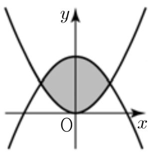
이차함수 $y=x^2$의 그래프의 윗부분(경계선 포함)과 이차함수 $y=-x^2+1$의 그래프의 아랫부분(경계선 포함)의 공통부분으로

[그림 2]의 어두운 부분이다.

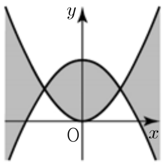
(i), (ii)에 의하여 구하는 영역은 [그림 3]의 어두운 부분이다. (단, 경계선은 포함한다.)



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

13. [출제의도] 연립방정식 이해하기

$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $(2x-y)^2=0$이므로 $y=2x$

㉠에 대입하면 $x^2=8$이므로

$\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=4\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=-4\sqrt{2} \end{cases}$

따라서 $\alpha\beta=16$

14. [출제의도] 직선의 기울기를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 B의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 할 때

점 A가 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$2=\dfrac{0+\alpha}{2}$, 즉 $\alpha=4$

삼각형 OAB의 넓이를 이등분하기 위해서는

직선 $y=mx$는 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는 $(3,\ -2)$이므로

$-2=3m$

따라서 $m=-\dfrac{2}{3}$

15. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$g(x)=0$에서

$ax+2a^2=a(x+2a)=0$

$a>0$이므로 $x=-2a$

따라서 점 C의 좌표는 $(-2a,\ 0)$

$f(x)=g(x)$에서

$x^2=ax+2a^2$

$(x-2a)(x+a)=0$

$x=-a$ 또는 $x=2a$

점 A는 제1사분면 위에 있으므로

점 E의 좌표는 $(2a,\ 0)$

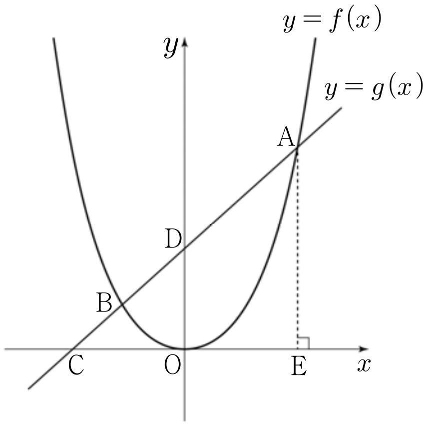
삼각형 COD와 삼각형 CEA의 닮음비는 $1:2$

이므로 넓이의 비는 $1:4$

즉 $S_1:S_2=1:3$이므로

$S_2=3S_1$

따라서 $k=3$



16. [출제의도] 여러 가지 방정식의 실근을 가질 조건을 이용하여 추론하기

$x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3=0$

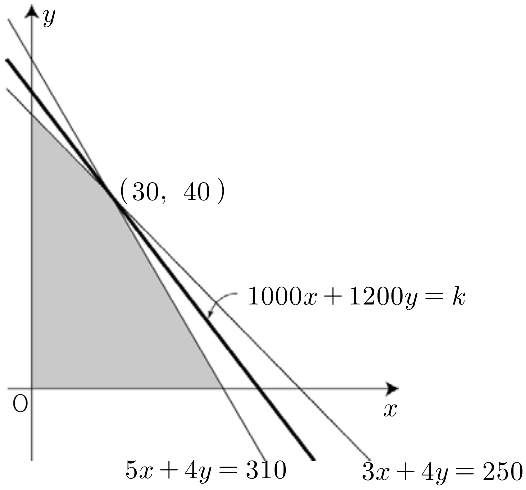
$(x-a)(x^2+8x+a^2)=0$

서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는

방정식 $x^2+8x+a^2=0$은
서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
판별식을 D라 할 때
$\frac{D}{4}=16-a^2>0$
따라서 $-4<a<4$ ……㉠
또한 $x=a$는 $x^2+8x+a^2=0$의 근이
아니어야 하므로
$2a^2+8a \neq 0$
따라서 $a \neq 0$이고 $a \neq -4$ ……㉡
㉠, ㉡에 의해 정수 a의 개수는 6

17. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
퇴적물 입자 A, B의 직경을 각각 D_A, D_B라 할 때
$D_A:D_B=2:5$이므로 양수 t에 대하여
$D_A=2t$, $D_B=5t$로 나타낼 수 있다.
$V_A=\left(\frac{4c-c}{18k}\right)\times g\times(2t)^2$
$V_B=\left(\frac{7c-c}{18k}\right)\times g\times(5t)^2$
따라서 $\frac{V_A}{V_B}=\frac{2}{25}$

18. [출제의도] 부등식 영역에서의 최대, 최소를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
꽃다발 A, B의 개수를 각각 x, y라 하면
점 $(x,\ y)$는 네 부등식
$x\geq 0$, $y\geq 0$, $5x+4y\leq 310$, $3x+4y\leq 250$
을 모두 만족시키는 영역에 있다.
판매 이익을 k라 하면
$1000x+1200y=k$ ……㉠이므로
두 직선
$5x+4y=310$, $3x+4y=250$
이 만나는 점 $(30,\ 40)$을 직선 ㉠이 지날 때,
k는 최댓값을 가진다.
따라서 최대 판매 이익은
$1000\times 30+1200\times 40=78000$(원)



19. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

> 직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고
> 직선 m의 방정식은 $y=\boxed{-\sqrt{3}}x$이다.
> 원 위의 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$이다.
> 점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로
> $\overline{\mathrm{PA}}=b$
> $\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\boxed{2}}$
> $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{|\sqrt{3}a+b|}{\boxed{2}}$
> 따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\boxed{\dfrac{3}{2}r^2}$

$s=-\sqrt{3}$, $t=2$, $f(r)=\dfrac{3}{2}r^2$

따라서 $f(s\times t)=f(-2\sqrt{3})=18$

20. [출제의도] 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 추론하기

ㄱ. 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{1-0}{0-1}=-1$이므로
직선 l의 기울기는 1이다. (참)

ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이므로
직선 l의 기울기는 t이다.
따라서 직선 l의 방정식은 $y=t(x-t)$ ⋯㉠
㉠에 점 $(3,\ 2)$를 대입하여 정리하면
$t^2-3t+2=0$이므로

t의 값은 1 또는 2

따라서 직선 l의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식에 ㉠을 대입하면

$t(x-t) \le ax^2$

즉 $ax^2 - tx + t^2 \ge 0$ ……㉡

㉡이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a > 0$이고

$ax^2 - tx + t^2 = 0$의 판별식을 D라 할 때

$D = t^2 - 4at^2 = t^2(1-4a) \le 0$

$t^2 > 0$이므로 $1 - 4a \le 0$ 즉 $a \ge \frac{1}{4}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. (참)

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 만나는 점을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

이차함수 $y = f(x)$의 그래프가

일차함수 $y = h(x)$의 그래프와

$x = \alpha$에서 접하므로

이차방정식 $f(x) - h(x) = 0$은 $x = \alpha$인 중근을 가진다.

이차함수 $y = f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로

$f(x) - h(x) = (x-\alpha)^2$

따라서 $f(x) = (x-\alpha)^2 + h(x)$

같은 방법으로 $g(x) = 4(x-\beta)^2 + h(x)$

$\beta = 2\alpha$이고

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$가

만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$f(t) = g(t)$이므로

$(t-\alpha)^2 + h(t) = 4(t-2\alpha)^2 + h(t)$

$3t^2 - 14\alpha t + 15\alpha^2 = 0$

$(3t - 5\alpha)(t - 3\alpha) = 0$

이때 $\alpha < t < 2\alpha$이므로 $t = \frac{5}{3}\alpha$

따라서 $\frac{t}{\alpha} = \frac{5}{3}$

22. [출제의도] 명제의 참, 거짓 이해하기

명제가 참이기 위해서는

$x = a$가 $x^2 - 5x - 14 = 0$의 근이어야 하므로

$a^2 - 5a - 14 = 0$

$(a+2)(a-7) = 0$

$a = -2$ 또는 $a = 7$

a는 양수이므로 $a = 7$

23. [출제의도] 이차방정식이 허근을 가질 조건 이해하기
주어진 방정식이 허근을 갖기 위해서는
판별식을 D라 할 때
$D = a^2 - 36 < 0$ 이므로 $-6 < a < 6$
따라서 부등식을 만족시키는 정수 a의 개수는 11

24. [출제의도] 나머지정리 이해하기
나머지정리에 의해
$f(-1) = 1 - a + b = 2$
$f(1) = 1 + a + b = 8$
이므로 두 식을 정리하면
$$\begin{cases} -a+b=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+b=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면
$a = 3,\ b = 4$
따라서 $f(x) = x^2 + 3x + 4$이므로
$f(2) = 4 + 6 + 4 = 14$

25. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\beta) \\ &= x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - 6x + \alpha\beta \\ &= (x-3)^2 - 9 + \alpha\beta \end{aligned}$$
따라서 이차함수 $y = f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -9+\alpha\beta)$이다.
$y = f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x - 7$ 위에 있으므로 $-9 + \alpha\beta = -1$ 이고 $\alpha\beta = 8$
따라서 $f(x) = x^2 - 6x + 8$ 이므로
$f(0) = 8$
(별해)
이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이고 $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 3$ 이므로 이차함수 $y = f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표는 3
이차함수의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x - 7$ 위에 있으므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -1)$
이차함수 $y = f(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로 $f(x) = (x-3)^2 - 1$
따라서 $f(0) = 8$

26. [출제의도] 원과 직선 사이의 거리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
원점에서의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선과 수직으로 만나야 한다.
점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식을
$y = a(x-3) + 4$ 라 할 때

원점과 점 $(3,\ 4)$를 연결한 직선의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$

이므로 $a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식을 정리하면

$3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 l 사이의 거리는

$\dfrac{|21+20-25|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{16}{5}$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로

원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$m=\dfrac{16}{5}-1=\dfrac{11}{5}$

따라서 $10m=22$

27. [출제의도] 집합의 연산법칙을 이용하여 집합의 원소의 합 추론하기

$S(A\cap B)=8$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$이고

$S(A\cup B)=28$

$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=36$

이때 $S(A)+S(B)=\dfrac{3}{2}S(A)$이므로

$S(A)=24$

(참고)

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$

28. [출제의도] 선분을 내분하는 점의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BO}}=3\sqrt{5}$ 이므로

각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=2:3$

$3\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$

$3\sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b+6)^2}$

$5a^2+60a+5b^2-120b=0$

$(a+6)^2+(b-12)^2=180$

즉 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$는 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$

위의 점이다. (단, 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$는 직선 AB 위에 있지 않다.)

직선 AB는 $y=-2x$이므로

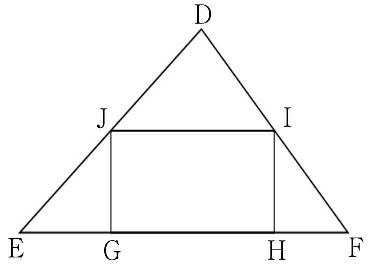
원의 중심 $(-6,\ 12)$가 직선 AB 위에 있다.

따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$의

반지름의 길이와 같으므로

$m^2 = 180$

29. [출제의도] 이차함수의 최댓값을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기



두 변 JG, JI의 길이를 각각 $x(\mathrm{m})$, $y(\mathrm{m})$라 할 때 삼각형 DJI와 삼각형 DEF는 닮음이므로

$(4-x) : 4 = y : 6$

$4y = 6(4-x)$

$y = 6 - \frac{3}{2}x$

오벨리스크의 부피는

$\frac{1}{3} \times 10 \times x \times y$

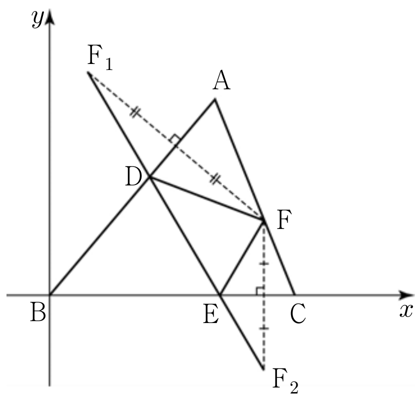
$= 20x - 5x^2$

$= -5(x-2)^2 + 20 \ (0 < x < 4)$

$x = 2$일 때 최대 부피는 $20(\mathrm{m}^3)$

따라서 $V = 20$

30. [출제의도] 두 점 사이의 거리의 최솟값을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



B(0, 0), C(4, 0)이 되도록

좌표평면 위에 삼각형 ABC를 나타내고

제1사분면 위의 점 A의 좌표를 (α, β)라 할 때

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 18$

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = (\alpha-4)^2 + \beta^2 = 10$

이므로 A(3, 3)

직선 AC의 방정식은 $y = -3x + 12$

점 F의 좌표를 (a, b)라 할 때 $b = -3a + 12$

직선 AB의 방정식은 $y=x$이므로
점 F를 직선 AB와 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 F_1, F_2라 하면
$\mathrm{F}_1(b,\ a)$, $\mathrm{F}_2(a,\ -b)$이다.
이때 $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{DF}_1}$, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{EF}_2}$이므로
삼각형 DEF의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{DF}_1}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EF}_2}$의 값과 같다.
$\overline{\mathrm{DF}_1}+\overline{\mathrm{DE}}+\overline{\mathrm{EF}_2}\geq\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2} &= \sqrt{(a-b)^2+(-b-a)^2}\\ &= \sqrt{2a^2+2b^2}\\ &= \sqrt{2a^2+2(-3a+12)^2}\\ &= \sqrt{20\left(a-\frac{18}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}\quad(3<a<4)\end{aligned}$$

삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$
따라서 $p+q=17$