# 수학 영역

## 가형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | ③ | *2* | ① | *3* | ① | *4* | ⑤ | *5* | ③ |
| *6* | ③ | *7* | ① | *8* | ④ | *9* | ⑤ | *10* | ④ |
| *11* | ② | *12* | ⑤ | *13* | ② | *14* | ④ | *15* | ③ |
| *16* | ② | *17* | ③ | *18* | ① | *19* | ⑤ | *20* | ② |
| *21* | ④ | *22* | 5 | *23* | 10 | *24* | 6 | *25* | 11 |
| *26* | 15 | *27* | 36 | *28* | 4 | *29* | 140 | *30* | 20 |

## 가형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2 \times 16^{\frac{1}{2}} = 2 \times 4 = 8$

2. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기

$A \subset B$이므로 $A \cap B = A$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

첫째항이 3, 공차가 2이므로 $a_4 = 3 + 3 \times 2 = 9$

4. [출제의도] 합성함수 이해하기

$g(f(1)) = g(3) = 17$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 4+} f(x) = 2 + 3 = 5$

6. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$\lim_{n \to \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n} - n \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1$

7. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$y' = 3x^2 + 2x - 2$ 이고,

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기 $m = 3$ 이므로

접선의 방정식은 $y = 3x + 1$

$m - n = 2$

8. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$ab = 2^8$, $\frac{a}{b} = 2^2$

$a = 2^2 b$ 이므로 $2^2 b^2 = 2^8$

따라서 $b=2^3$이고 $a=2^5$이다.
$\log_2(a+4b)=6$

9. [출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$f(x)=3x^2+6x-2$
$f(2)=22$

10. [출제의도] 진리집합의 포함관계 추론하기
조건 $p$의 진리집합 $P=\{x|a-3\le x\le a+3\}$
조건 $q$의 진리집합 $Q=\{x|-6\le x\le 4\}$,
명제 $p\to q$가 참이 되려면 $P\subset Q$
$-6\le a-3$ 이고 $a+3\le 4$
$-3\le a\le 1$
따라서 실수 $a$의 최댓값은 1

11. [출제의도] 급수의 성질 이해하기
$a_n=5+2(n-1)=2n+3$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+5)-(2k+3)}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)=\frac{1}{5}$

12. [출제의도] 함수의 최대와 최소 이해하기
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-10$ | $\nearrow$ | $10$ | $\searrow$ | $6$ |

따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의
최댓값은 10

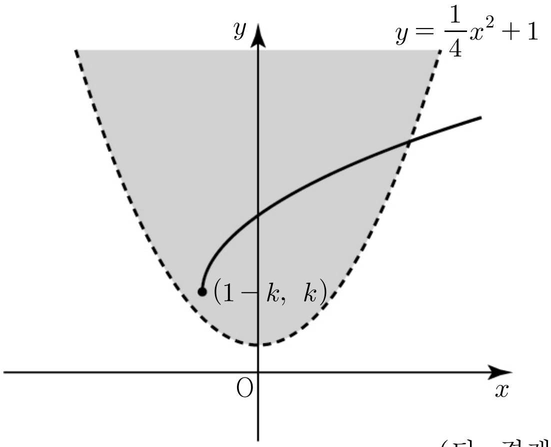
13. [출제의도] 부분집합의 개수 추론하기
(i) $6\in X$인 경우
집합 $X$의 개수는 $2^4-1=15$
(ii) $6\notin X$인 경우
집합 $X$는 3, 4를 반드시 포함해야 하므로
$2^{4-2}=4$
(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는
집합 $X$의 개수는 19

14. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
함수 $y=g(x)$의 그래프를 평행이동하면
함수 $h(x)=\sqrt{4(x-1+k)}+k$의 그래프이다.

함수 $h(x)$의
정의역은 $\{x|x$는 $x \geq 1-k$인 모든 실수$\}$이고
치역은 $\{y|y$는 $y \geq k$인 모든 실수$\}$이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=h(x)$의 그래프가 오직 한 점에서 만나려면 함수 $y=h(x)$
그래프 위의 점 $(1-k,\ k)$는
부등식 $y > \frac{1}{4}x^2+1$의 영역에 있어야한다.

$k > \frac{1}{4}(1-k)^2+1$

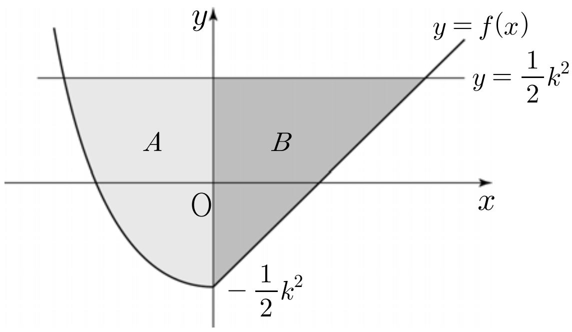
$k^2-6k+5<0$
$1<k<5$인 자연수 $k$는 2, 3, 4이므로
$k$의 값의 합은 9



(단, 경계선 제외)

(별해)
함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $(1-k,\ k)$는 직선 $y=-x+1$ 위에 있다.
$y=\frac{1}{4}x^2+1$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의 교점의 $x$좌표가 $-4$, 0이므로 $-4<1-k<0$
$1<k<5$이므로 $k$의 값의 합은 9

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기




(i) $x<0$일 때, $y=x^2-\frac{1}{2}k^2$의 그래프와

직선 $y=\frac{1}{2}k^2$의 교점의 $x$좌표는 $-k$

($A$의 넓이)$=\int_{-k}^{0}\left\{\frac{1}{2}k^2-\left(x^2-\frac{1}{2}k^2\right)\right\}dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+k^2x\right]_{-k}^{0}=\frac{2}{3}k^3$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때, 직선 $y=x-\frac{1}{2}k^2$ 과

직선 $y=\frac{1}{2}k^2$의 교점의 $x$좌표는 $k^2$

($B$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times k^2\times k^2=\frac{1}{2}k^4$

$A$와 $B$의 넓이가 같으므로 $\frac{2}{3}k^3=\frac{1}{2}k^4$

따라서 $k=\frac{4}{3}$

**16. [출제의도] 도함수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기**

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이고,
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로
다른 두 점에서 만난다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 접점의 $x$좌표를 $k$라 하면

$f(k)=k$ 이므로 $\frac{1}{3}k^3+a=k$

$f'(k)=1$ 이므로 $k^2=1$ 이다.

$k=1$ 일 때 $a=\frac{2}{3}$, $k=-1$일 때 $a=-\frac{2}{3}$

따라서 모든 상수 $a$의 값의 곱은 $-\frac{4}{9}$

**17. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기**

(i) $k=1$ 인 경우
$\lim_{x\to 2-} f(x)f(x)=(-2)\times(-2)=4$
$\lim_{x\to 2+} f(x)f(x)=(-6)\times(-6)=36$
$\lim_{x\to 2} f(x)f(x)$가 존재하지 않으므로
함수 $f(x)f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
(ii) $k=-1$ 인 경우
위의 (i)과 같은 방법에 의하여
함수 $f(x)f(-x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
(iii) $k\neq -1$, $k\neq 1$ 인 경우
함수 $f(kx)$는 $x=2$에서 연속이다.
함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되려면
$\lim_{x\to 2-} f(x)f(kx)=\lim_{x\to 2+} f(x)f(kx)=f(2)f(2k)$
$-2f(2k)=-6f(2k)=-2f(2k)$
따라서 $f(2k)=0$
$x=-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4$ 에서 $f(x)=0$이므로
$2k$는 $-4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4$ 이다.
그러므로 $k=-2, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2$
(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 $k$의 값의 곱은 2

**18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기**

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2=\boxed{4}$,

(우변)$=\sum_{k=1}^{1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{1}a_k=\boxed{4}$이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m\,(m\geq 1)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k$이므로

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}\right)^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(\boxed{2m+2})\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+m^3+5m^2+7m+4$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(a_{m+1})^3-(m^2+5m+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 $n$에 대하여 (*)이 성립한다.

$p=4,\ f(m)=2m+2$ 이므로

$f(4)=10$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

$f(-x)=-f(x),\ g(x)=-f(x)$이므로

ㄱ. $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$ (참)

ㄴ. $\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}g(x)dx$

$=-\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=-2\int_{0}^{1}f(x)dx$

$=-2\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^1=\frac{7}{2}$ (참)

ㄷ. $h(x)=\int_{0}^{x}g(t)dt-\int_{0}^{x}f(t)dt-3$이라 하자.

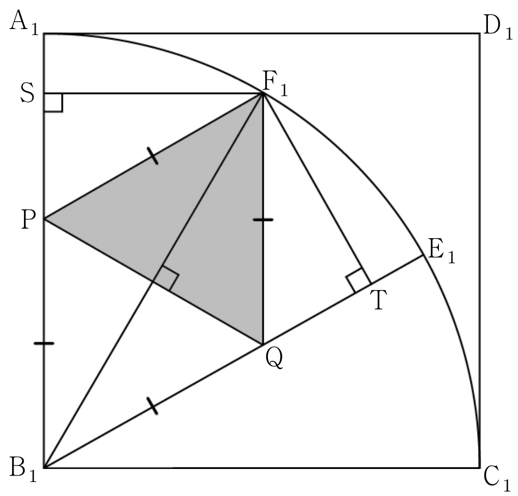
$h(x)=-2\int_{0}^{x}f(t)dt-3$은 연속함수이다.

$h(0)=-3<0$

$h(1) = -2\int_0^1 f(t)dt - 3 = \frac{1}{2} > 0$

사이값 정리에 의하여 $h(c) = 0$인 실수 $c$가
0과 1 사이에 적어도 하나 존재한다. (참)
따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기




부채꼴 $B_1E_1A_1$에 내접하는 정삼각형의 꼭짓점 중
$F_1$이 아닌 나머지 두 점을 각각 P, Q라 하자.
점 $F_1$에서 선분 $A_1B_1$, 선분 $B_1E_1$에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하자.
삼각형 $B_1F_1S$와 삼각형 $B_1F_1T$는 합동이므로
삼각형 $F_1SP$와 삼각형 $F_1TQ$는 합동이다.
$\overline{B_1P} = \overline{B_1Q}$이고 삼각형 $B_1QP$는 정삼각형이다.
$\overline{F_1P} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\overline{B_1F_1} = 1$

$\overline{F_1P} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

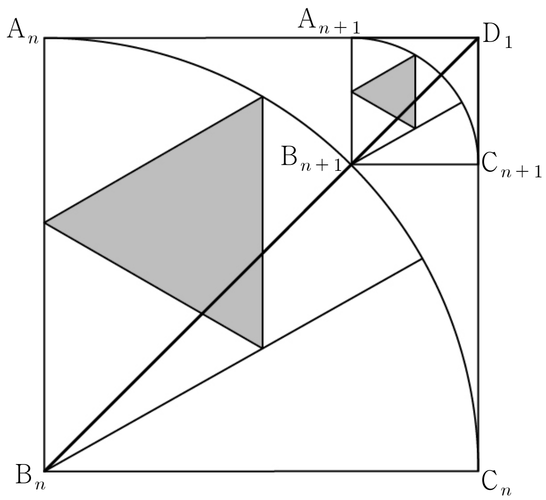


그림 $R_n(n \geq 1)$을 얻을 때, 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_1$의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하고 새로 그려진 정삼각형의 넓이를 $T_n$이라 하자.

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_1} = \sqrt{2}\,a_n$, $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_1} = \sqrt{2}\,a_n - a_n = (\sqrt{2}-1)a_n$

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_1$과

정사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_1$이 닮음이므로

$a_n : a_{n+1} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_1} : \overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{D}_1} = \sqrt{2} : \sqrt{2}-1$

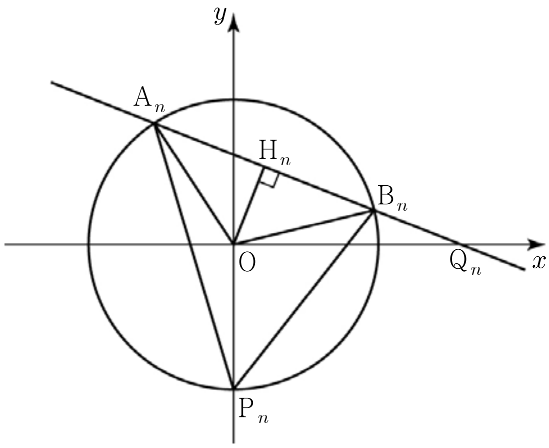
$T_n : T_{n+1} = 2 : (\sqrt{2}-1)^2$

$T_{n+1} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}T_n$ 이고

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$$

21. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기




원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n = 60^\circ$ 이므로 $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n = 120^\circ$

원점 O에서 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}_n$이라 하자.

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n$이 이등변 삼각형이고

$\overline{\mathrm{O}\mathrm{A}_n} = n$, $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{H}_n = 60^\circ$ 이므로 $\overline{\mathrm{O}\mathrm{H}_n} = \dfrac{n}{2}$

원점 O와 직선 $a_n x - y - (n+1)a_n = 0$ 사이의 거리는 $\dfrac{n}{2}$이므로 $\dfrac{|-(n+1)a_n|}{\sqrt{a_n^{\,2}+1}} = \dfrac{n}{2}$

$$\frac{(n+1)^2 a_n^{\,2}}{a_n^{\,2}+1} = \frac{n^2}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\,2}}{a_n^{\,2}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4}$$

22. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = 5$

23. [출제의도] 등비수열 이해하기
세 수 $a+10$, $a$, $5$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항의 성질에 의하여
$a^2 = 5(a+10)$, $a^2-5a-50=(a-10)(a+5)=0$
$a>0$이므로 $a=10$

24. [출제의도] 속도와 거리의 관계 이해하기
$\int_1^3 |3t^2-6t|\,dt$
$= \int_1^2 (-3t^2+6t)dt + \int_2^3 (3t^2-6t)dt$
$=6$

25. [출제의도] 로그의 정의 이해하기
$49-x^2>0$, $x+6>0$, $x+6 \neq 1$을 모두 만족시키는 $x$의 범위를 구하면
$-7<x<7$, $x>-6$, $x \neq -5$이므로
조건을 모두 만족시키는 정수 $x$는
$-4$, $-3$, $-2$, $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, $6$이다.
따라서 모든 정수 $x$의 값의 합은 $11$

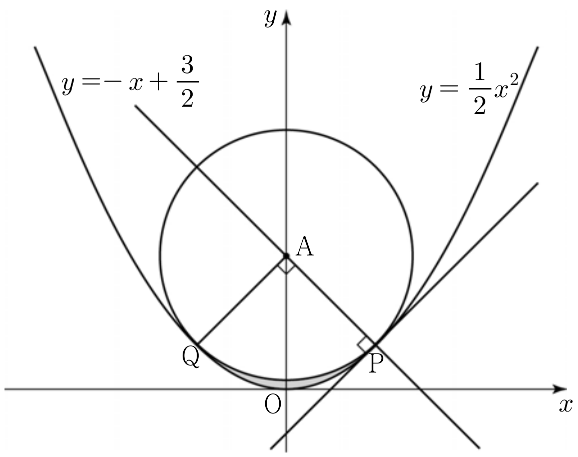
26. [출제의도] 미분계수의 정의 이해하기
$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-2}{x} = 3$ 이므로
$f(0)=2$ 이고 $f'(0)=3$
$\lim_{x\to3} \frac{g(x-3)-1}{x-3} = 6$ 이므로
$x-3=t$라 두면 $x\to3$일 때 $t\to0$
$\lim_{t\to0} \frac{g(t)-1}{t} = 6$
$g(0)=1$ 이고 $g'(0)=6$
$h(x)=f(x)g(x)$ 이므로
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=15$

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $y=f(x)$,
$y=g(x)$의 그래프가 만나는
세 점의 $x$ 좌표가 $-1$, $0$, $2$이므로
$f(x)-g(x)=a(x+1)x(x-2)\ (a \neq 0)$
조건 (나)에 의하여
$\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}dx = 4-12=-8$이므로
$\int_0^2 \{f(x)-g(x)\}dx = \int_0^2 \{a(x+1)x(x-2)\}dx$
$= a\int_0^2 (x^3-x^2-2x)dx = a\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^2$

$= a\left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{8}{3}a = -8$
$a = 3$이므로 $f(x) - g(x) = 3(x+1)x(x-2)$
$f(3) - g(3) = 36$

28. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
A$(1,1)$를 지나고 직선 $y = x$와 수직인 직선은 $y = -x+2$이므로 점 B의 $x$좌표는 2이다.
P$(t,\ t)$이므로 Q$(t,\ \sqrt{t})$이고, R는 직선
$y = -x+2$ 위의 점이므로 R$(-t+2,\ t)$
$\overline{\mathrm{QP}} = \sqrt{t} - t$, $\overline{\mathrm{PR}} = -2t+2$이므로
$S(t) = \frac{1}{2} \times \{t + (1-t)\} \times (\sqrt{t} - t) = \frac{1}{2}(\sqrt{t} - t)$
$T(t) = \frac{1}{2} \times t \times (-2t+2) = t - t^2$
$$\lim_{t \to 1-} \frac{t - t^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{t} - t)} = \lim_{t \to 1-} \frac{2(t - t^2)(\sqrt{t} + t)}{(t - t^2)} = 4$$

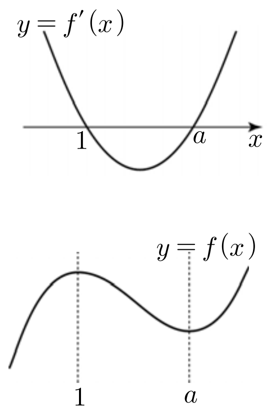
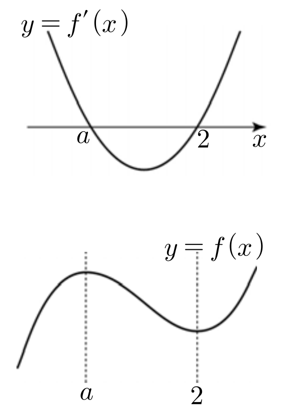
29. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기




두 곡선의 교점의 좌표를 각각
P$\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right)$, Q$\left(-\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right)$이라 하자. $(\alpha > 0)$
함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프의 접점 P에서 접선의 기울기는 $\alpha$이고 이 접선은 직선 AP와 수직이다.
즉, $\dfrac{\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}}{\alpha - 0} = -\frac{1}{\alpha}$
$\alpha^2 = 1$이므로 P$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$, Q$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$
직선 AP는 $y = -x + \frac{3}{2}$
$\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$, 원의 반지름은 $\sqrt{2}$
구하는 넓이를 $S$라 하면

$$S = 2\left\{\int_0^1\left(-x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$= 2\left\{\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right]_0^1-\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$= \frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$
$a = \frac{5}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ 이므로
$120(a+b) = 140$

**30. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**
$1 < x < 2$인 모든 실수 $x$에 대하여
$f'(x) < 0$이고 $f'(x-1)f'(x+1) < 0$이므로
두 함수 $y = f'(x)$와 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음의 두 가지 경우이다.

| (i) $f'(1) = 0$ | (ii) $f'(2) = 0$ |
|---|---|
|  |  |
| $a \geq 3$ | $a \leq 0$ |

함수 $g(x) = \begin{cases} f(-x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$라 하자.
함수 $g(x)$는 모든 실수 $x$에서 미분가능하므로
$g'(0)$가 존재해야 한다.
$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0-}\frac{f(-h)-f(0)}{h} = -f'(0)$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$$
$-f'(0) = f'(0)$이므로 $f'(0) = 0$
위의 그래프의 개형 중 (ii)에 해당되므로
$f'(x) = 3x(x-2)$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + C$ (단, $C$는 적분상수이다.)
$f(0) - f(-2) = 20$