제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지선다형

1. $2\times16^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

2. 전체집합 U의 서로 다른 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때, 집합 $A\cap B$와 같은 집합은? (단, 집합 A는 공집합이 아니다.) [2점]

① A ② B ③ A^C ④ B^C ⑤ $A\cup B$

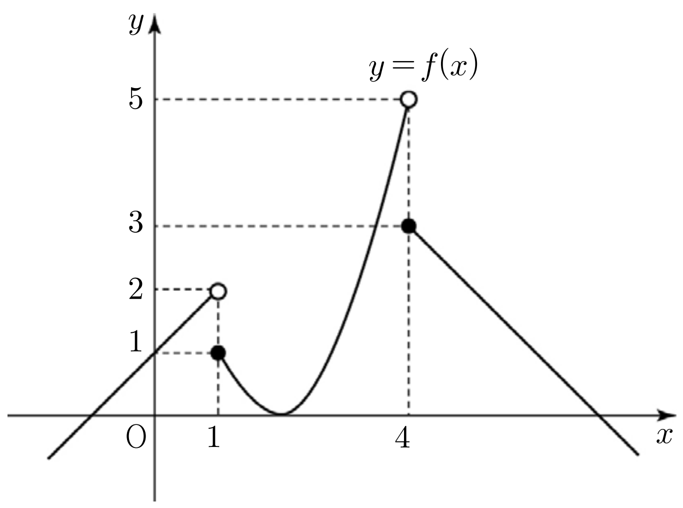
3. 첫째항이 3이고, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4의 값은? [2점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

4. 두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=2x^2-1$ 에 대하여 $(g\circ f)(1)$ 의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

5. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to4+}f(x)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

7. 곡선 $y=x^3+x^2-2x+4$ 위의 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$일 때, $m-n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.) [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

8. 두 양수 a, b에 대하여 $\log_2 ab = 8$, $\log_2 \frac{a}{b} = 2$일 때, $\log_2(a+4b)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_1^x f(t)\,dt = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

10. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q를 각각

$$p : |x-a| \le 3, \quad q : x^2 + 2x - 24 \le 0$$

이라 하자. 명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 첫째항이 5 이고, 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12. 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$ 에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+6$ 의 최댓값은? [3점]

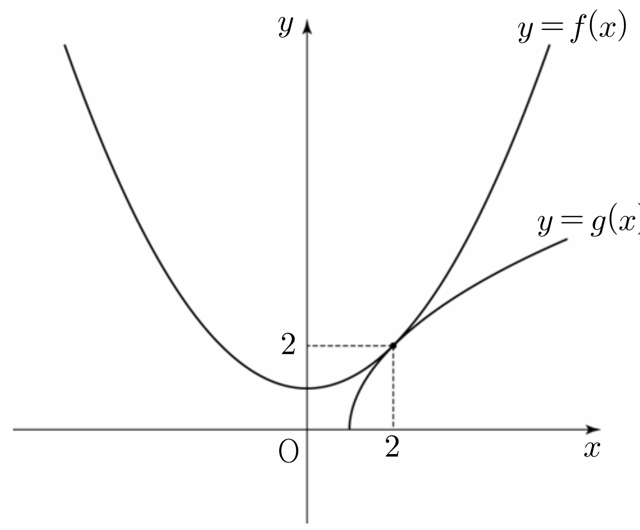
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

13. 집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는? [3점]

(가) $n(X)\geq 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

14. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+1$, $g(x)=\sqrt{4x-4}$ 의 그래프가 한 점 $(2,\ 2)$에서 만난다. 자연수 k에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

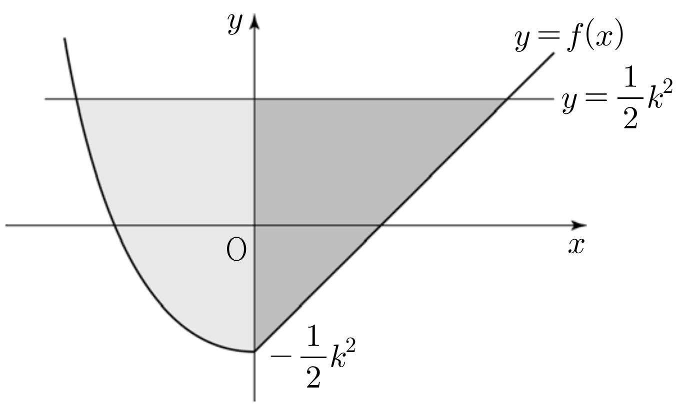


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{2}k^2 & (x<0) \\ x-\frac{1}{2}k^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}k^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 y축에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값은? (단, $k>0$) [4점]



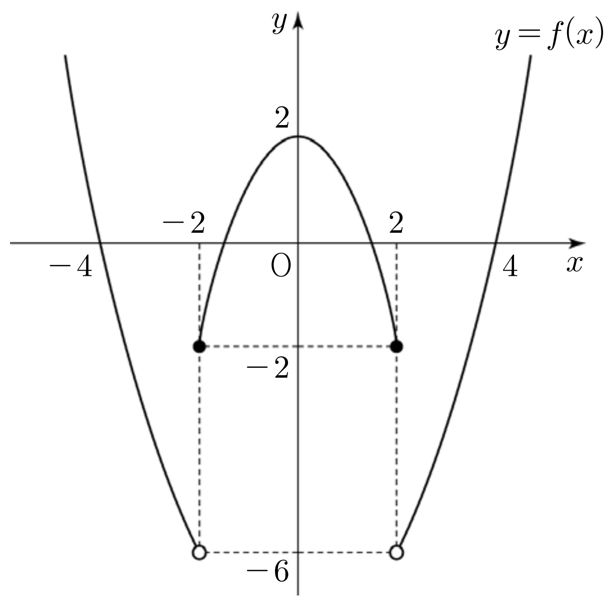
① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

16. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+a$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 상수 a의 값의 곱은? [4점]

① $-\frac{25}{36}$ ② $-\frac{4}{9}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ $-\frac{1}{36}$

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2)\\ -x^2+2 & (|x|\le 2)\end{cases}$$ 의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

18. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=n+1$이다.
다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\left(\sum_{k=1}^{1}a_k\right)^2=$ (가),

(우변)$=\sum_{k=1}^{1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{1}a_k=$ (가) 이므로

$(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m(m\ge 1)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k$ 이므로

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\right)^2$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(\boxed{\text{(나)}})\sum_{k=1}^{m}a_k+(a_{m+1})^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+m^3+5m^2+7m+4$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3+(a_{m+1})^3-(m^2+5m+4)$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m+1}a_k$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $f(p)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

19. 삼차함수 $f(x)=x^3-4x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선을 $y=g(x)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

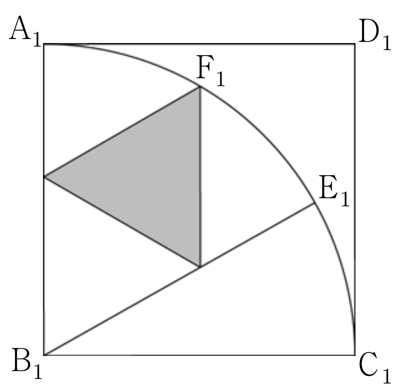
ㄱ. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

ㄴ. $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} g(x)\,dx=\frac{7}{2}$

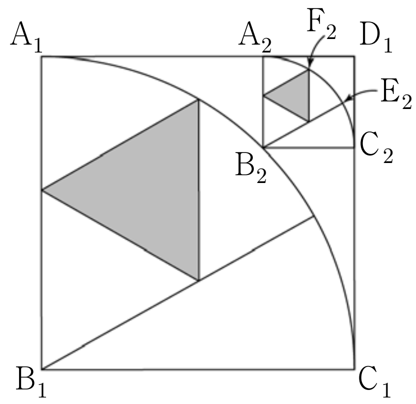
ㄷ. 방정식 $\displaystyle\int_{0}^{x} g(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt+3$ 은 열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

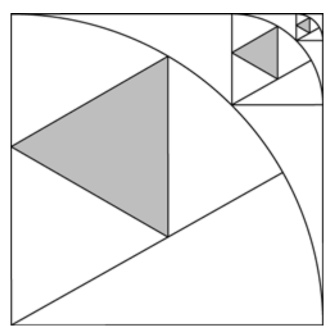
20. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 중심을 B_1, 선분 B_1C_1 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 을 그린다. 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 의 호 C_1A_1 을 삼등분하는 두 점을 각각 E_1, F_1 이라 하고, 선분 B_1E_1 을 그린다. 점 F_1 을 한 꼭짓점으로 하고 부채꼴 $B_1E_1A_1$ 에 내접하는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 점 D_1 과 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 의 호 C_1A_1 을 이등분하는 점 B_2 를 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$ 을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?
(단, $\angle A_nB_nE_n=60^\circ$) [4점]



R_1



R_2


R_3

⋯

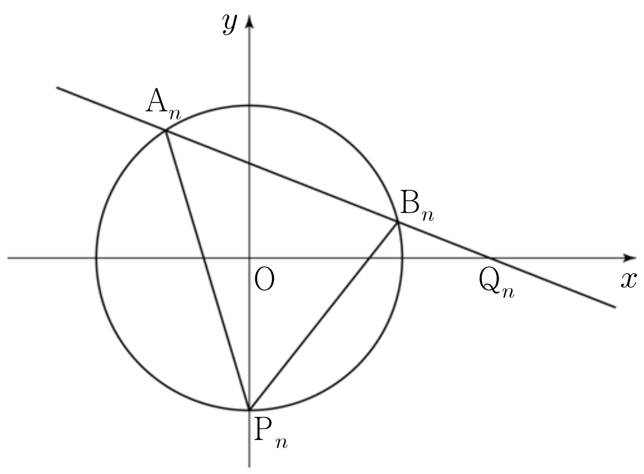
⋯

① $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ② $\dfrac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$
④ $\dfrac{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$

21. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(0,\ -n)$, 점 Q_n의 좌표를 $(n+1,\ 0)$이라 하자. 원 $x^2+y^2=n^2$ 위의 서로 다른 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 A_n, B_n, Q_n은 한 직선 위에 있다.
(나) $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n = 60^\circ$

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_n}^2}{{a_n}^2+1}$의 값은? (단, 두 점 A_n, B_n의 y좌표는 모두 양수이다.) [4점]



① $\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$

단답형

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 세 수 $a+10$, a, 5가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)=3t^2-6t$ 이다. 점 P 가 시각 $t=1$ 에서 시각 $t=3$ 까지 움직인 거리를 구하시오. [3점]

25. $\log_{(x+6)}(49-x^2)$ 이 정의되도록 하는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=3, \quad \lim_{x\to 3}\frac{g(x-3)-1}{x-3}=6$$

을 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 일 때, $h'(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

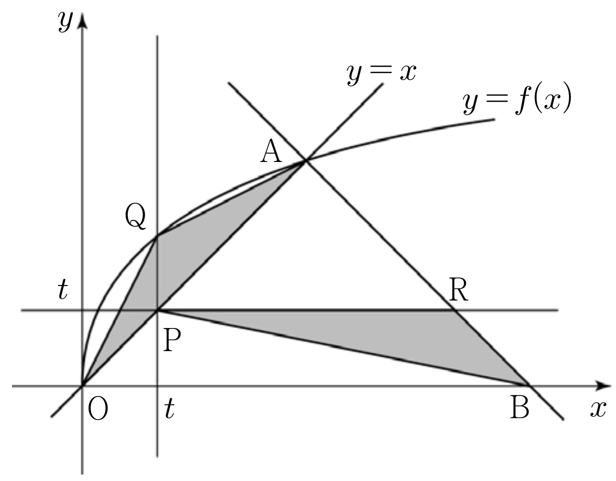
27. 최고차항의 계수가 1인 두 사차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 세 점의 x좌표는 각각 -1, 0, 2이다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx=4$, $\int_0^2 g(x)dx=12$

$f(3)-g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 두 점 중에서 원점 O가 아닌 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 직선 $x=t$가 직선 $y=x$와 만나는 점을 P, 직선 $x=t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 Q, 직선 $y=t$가 직선 AB와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OAQ와 삼각형 PBR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{T(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오. (단, $0<t<1$) [4점]



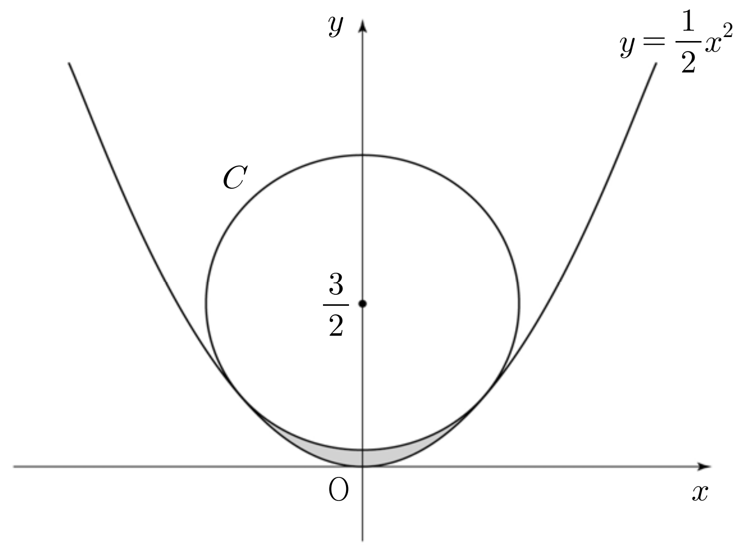
29. 그림과 같이 중심이 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이고,

반지름의 길이가 $r\left(r<\frac{3}{2}\right)$인 원 C가 있다.

원 C가 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만날 때,

원 C와 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프로 둘러싸인  모양의

넓이는 $a+b\pi$ 이다. $120(a+b)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 유리수이다.) [4점]



30. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1<x<2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)<0$ 이고 $f'(x-1)f'(x+1)<0$ 이다.
(나) 함수 $f(|x|)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하다.

$f(0)-f(-2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.