수학 영역

나형 정답

1	①	*2*	②	*3*	④	*4*	①	*5*	③
6	④	*7*	⑤	*8*	④	*9*	①	*10*	③
11	④	*12*	②	*13*	⑤	*14*	③	*15*	⑤
16	②	*17*	②	*18*	③	*19*	①	*20*	⑤
21	②	*22*	27	*23*	147	*24*	21	*25*	8
26	14	*27*	28	*28*	200	*29*	55	*30*	20

나형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 2 = 1$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에서
$A \cap B = \{2,\ 4\}$이므로 모든 원소의 합은 6

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$

4. [출제의도] 지수 계산하기

$3^x = 2$이므로 $3^x + 3^{-x} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

5. [출제의도] 등비수열 계산하기

$a_2 + a_3 = r + r^2 = 6$이므로 $r = 2\ (r > 0)$

따라서 $a_6 = 2^5 = 32$

6. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$2x > 0$, $\frac{8}{x} > 0$ 이므로

$2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \times \frac{8}{x}} = 8$

(단, 등호는 $x = 2$일 때 성립)

따라서 $2x+\dfrac{8}{x}$ 의 최솟값은 8

7. [출제의도] 수열의 합 계산하기
$$\sum_{k=1}^{7}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$$

8. [출제의도] 지수법칙 이해하기
$12=2^{\frac{4}{a}},\ 3=2^{\frac{1}{b}}$ 이므로
$$2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{12}{3}=4$$

9. [출제의도] 미분계수 이해하기
$f'(x)=6x^2+a$ 이므로
$f'(1)=6+a=7$ 에서 $a=1$

10. [출제의도] 필요충분조건 이해하기
p는 q이기 위한 필요충분조건이므로
$(x+1)(x-2)=x^2+ax+b$
$a=-1,\ b=-2$
$a+b=-3$

11. [출제의도] 일대일 대응 이해하기
함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되기 위해서는
$(a+3)$과 $(2-a)$의 부호가 같아야한다.
$(a+3)(2-a)>0$ 즉, $(a+3)(a-2)<0$
$-3<a<2$
조건을 만족시키는 정수 a는 $-2,-1,0,1$
따라서 4개

12. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기
$a_1=1$
$$a_2=\frac{2}{1+a_1}+1=\frac{2}{2}+1=2$$
$$a_3=\frac{3}{1+a_2}+1=\frac{3}{3}+1=2$$
$$a_4=\frac{4}{1+a_3}+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$$
따라서 $a_4=\dfrac{7}{3}$

13. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기
나머지정리에 의하여 $R_n=2^n$

$$\sum_{n=1}^{5} R_n = \sum_{n=1}^{5} 2^n = \frac{2(2^5-1)}{2-1} = 62$$

14. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$x=1$에서 연속이다.
$g(x) = -x^2+a,\ h(x) = 2x^2+bx+4$라 하면
$\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1+} h(x) = f(1)$
$-1+a = 6+b$ ⋯ ㉠
또한 $f'(1)$이 존재하므로
$$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$g'(1) = h'(1)$
$g'(x) = -2x,\ h'(x) = 4x+b$이므로
$-2 = 4+b$
$b=-6$이고 ㉠에 의하여 $a=1$이므로 $a^2+b^2=37$

15. [출제의도] 급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-n^2\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-n^2\right)=0$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n}{a_n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_n-n^2\right)+n^2-n}{\left(a_n-n^2\right)+2n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n-n^2}{n^2}+1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_n-n^2}{n^2}+2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

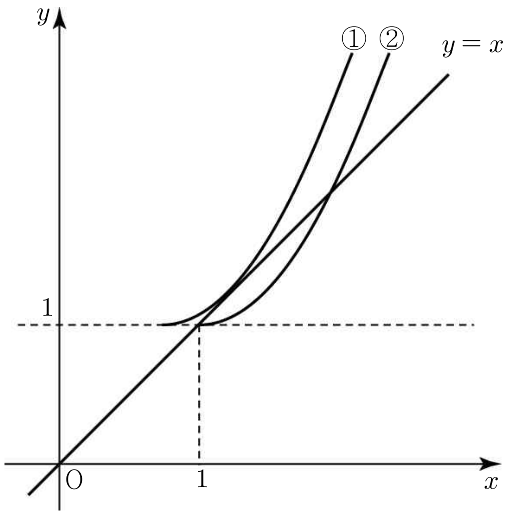
16. [출제의도] 연속함수의 정의 이해하기

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & (0 \le x < 1) \\ \dfrac{a+3}{2} & (x=1) \\ x & (x>1) \end{cases}$$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$
$a+2 = 1 = \dfrac{a+3}{2}$
$a = -1$

17. [출제의도] 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프 관계 이해하기

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다.
$f(x)=x^2-2kx+k^2+1=(x-k)^2+1$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 항상 점 $(k,\ 1)$을 지난다.
다음 그림에서 ①과 같이 접할 때의 k값을 a, ②일 때의 k값을 b라 하면 $a<k\le b$일 때

두 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나므로 k의 최댓값은 b이다.
②일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로
$1-2b+b^2+1=1$
$b=1$
따라서 k의 최댓값은 1



18. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$\mathrm{G}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$이므로 $\mathrm{A}\left(t,\ \frac{3}{t}\right)$
$3t=\frac{1}{2}\times f(t)\times\frac{3}{t}$이므로 $f(t)=2t^2$

$$\lim_{t\to1}\frac{f(t)-2t}{t-1}=\lim_{t\to1}\frac{2t^2-2t}{t-1}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{2t(t-1)}{t-1}=\lim_{t\to1}2t=2$$

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명과정 추론하기
(i) $n=1$일 때
(좌변)$=\left(\sum_{k=1}^{1}a_k\right)^2=\boxed{4}$,
(우변)$=\sum_{k=1}^{1}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{1}a_k=\boxed{4}$이므로
(*)이 성립한다.
(ii) $n=m\ (m\geq 1)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k$이므로
$\left(\sum_{k=1}^{m+1}a_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}\right)^2$
$=\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$
$=\sum_{k=1}^{m}(a_k)^3-2\sum_{k=1}^{m}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)a_{m+1}+(a_{m+1})^2$

$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + (\boxed{2m+2}) \sum_{k=1}^{m} a_k + (a_{m+1})^2$

$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + m^3 + 5m^2 + 7m + 4$

$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + (a_{m+1})^3 - (m^2 + 5m + 4)$

$= \sum_{k=1}^{m+1} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{m+1} a_k$

이다. 따라서 $n = m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$p = 4$, $f(m) = 2m+2$ 이므로

$f(4) = 10$

20. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$ (참)

ㄴ. $f(0)f(3) = 0$

$\lim_{x \to 0-} f(x)f(x+3) = 1 \times 0 = 0$

$\lim_{x \to 0+} f(x)f(x+3) = 2 \times 0 = 0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)f(x+3) = 0$

함수 $f(x)f(x+3)$은 $x = 0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $g(x) = f(x)f(x+1) + 2x - 5$라 하면

ㄴ과 같은 방법에 의하여 함수 $g(x)$는 $x = 1$, $x = 2$에서 연속이고

함수 $f(x)$가 $1 < x < 2$, $x > 2$에서 연속이므로

함수 $g(x)$는 $[1,\ 3]$에서 연속이다.

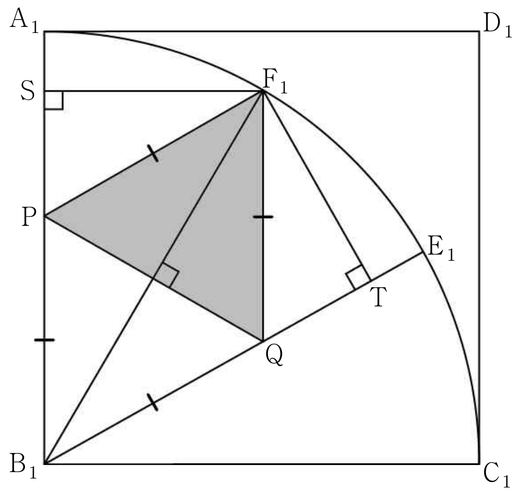
$g(1) = f(1)f(2) - 3 = -3 < 0$

$g(3) = f(3)f(4) + 1 = 1 > 0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $g(c) = 0$인 실수 c가 1과 3 사이에 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



부채꼴 $B_1E_1A_1$에 내접하는 정삼각형의 꼭짓점 중
F_1이 아닌 나머지 두 점을 각각 P, Q라 하자.
점 F_1에서 선분 A_1B_1, 선분 B_1E_1에 내린 수선의 발을 각각 S, T라 하자.
삼각형 B_1F_1S와 삼각형 B_1F_1T는 합동이므로
삼각형 F_1SP와 삼각형 F_1TQ는 합동이다.
$\overline{B_1P} = \overline{B_1Q}$이고 삼각형 B_1QP는 정삼각형이다.

$\overline{F_1P} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\overline{B_1F_1} = 1$

$\overline{F_1P} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이므로 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

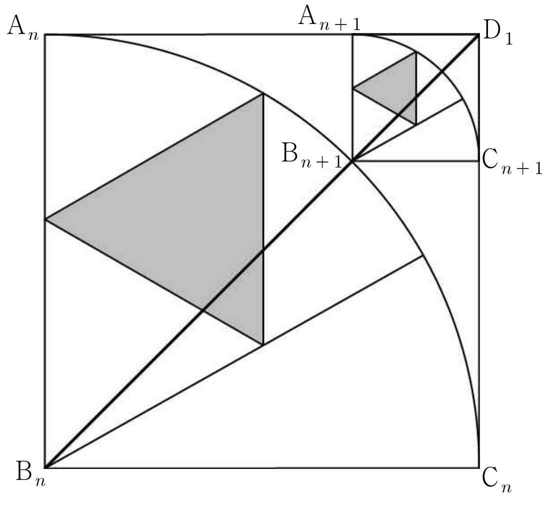


그림 $R_n(n \geq 1)$을 얻을 때, 정사각형 $A_nB_nC_nD_1$의 한 변의 길이를 a_n이라 하고
새로 그려진 정삼각형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{B_nD_1} = \sqrt{2}\,a_n$, $\overline{B_{n+1}D_1} = \sqrt{2}\,a_n - a_n = (\sqrt{2}-1)a_n$

정사각형 $A_nB_nC_nD_1$과
정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_1$이 닮음이므로

$a_n : a_{n+1} = \overline{B_nD_1} : \overline{B_{n+1}D_1} = \sqrt{2} : \sqrt{2}-1$

$T_n : T_{n+1} = 2 : (\sqrt{2}-1)^2$

$T_{n+1} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} T_n$ 이고

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$$

22. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+3}-2^n}{3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{27-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1} = 27$$

23. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log A = 2.1673 = 2+0.1673$

$= \log 100 + \log 1.47 = \log 147$

$A = 147$

24. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_{10} = S_{10} - S_9 = 120 - 99 = 21$

25. [출제의도] 부분집합의 성질 이해하기

집합 X는 A의 부분집합이고
1, 2를 반드시 포함해야 하므로
모든 집합 X의 개수는 $2^{5-2} = 8$

26. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다항함수 추론하기

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(x)-x^3}{x^2+1} = 2$ 이므로

$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

$\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{x+1} = 5$ 이므로

$f(-1) = -1+2-a+b = 0$

$b = a-1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2+ax+a-1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2+x+a-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} (x^2+x+a-1)$$

$$= a-1 = 5$$

따라서 $a = 6$, $b = 5$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 5$

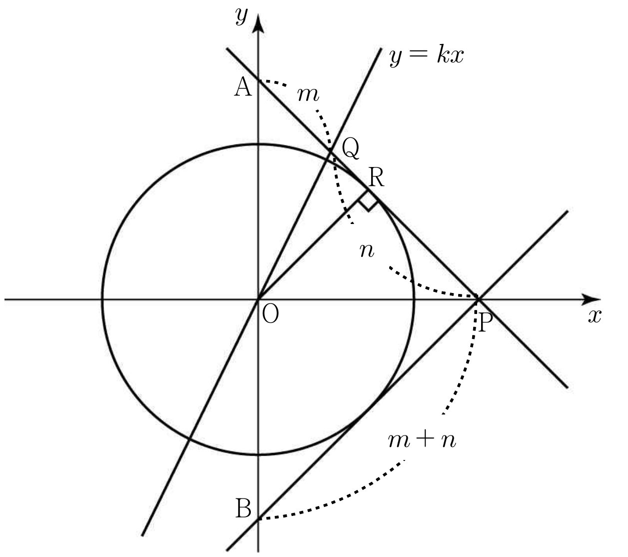
$f(1) = 14$

27. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\sqrt[4]{n^m} = n^{\frac{m}{4}}$ 에서

(i) $m=0$일 때
n의 값에 관계없이 유리수가 되므로
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 16$
(ii) $m=-1$ 또는 $m=1$일 때
n이 어떤 자연수의 네제곱인 수가 되어야 하므로 $n=1,\ 16$
(iii) $m=-2$ 또는 $m=2$일 때
n이 어떤 자연수의 제곱인 수가 되어야 하므로 $n=1,\ 4,\ 9,\ 16$
(i), (ii), (iii)에 의하여
모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는
$16+(2\times 2)+(2\times 4)=28$

28. [출제의도] 등차수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
제1사분면에서의 직선과 원의 접점을 R라 하면
$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2$이고 $\angle\mathrm{OPR}=45^\circ$이므로
삼각형 OPR와 삼각형 OAR는 합동이다.
따라서 점 A의 좌표는 (0, 2)이다.



$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이고 $S_1,\ S_2,\ S_3$이 이 순서대로 등차수열을 이루고 $\overline{\mathrm{AQ}},\overline{\mathrm{QP}},\overline{\mathrm{PB}}$도 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{PB}}$이다.
$\overline{\mathrm{AQ}}=m,\ \overline{\mathrm{QP}}=n$이라 하면 $\overline{\mathrm{PB}}=m+n$이고
$2n=2m+n$이므로 $m:n=1:2$
점 Q는 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$와 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$을 $1:2$로
내분하는 점이므로 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$이고
점 Q는 직선 $y=kx$ 위에 있으므로 $k=2$
$100k=200$

29. [출제의도] 수열의 규칙을 추론하여 수학 내적 문제 해결하기
$b_n=$ (3^{n-1}을 5로 나눈 나머지) 라 하자.
3^4을 5로 나눈 나머지가 1이므로
자연수 k에 대하여
$b_1=b_5=b_9=\cdots=b_{4k-3}=1$
$b_2=b_6=b_{10}=\cdots=b_{4k-2}=3$

$b_3 = b_7 = b_{11} = \cdots = b_{4k-1} = 4$

$b_4 = b_8 = b_{12} = \cdots = b_{4k} \quad = 2$ 이므로

수열 $\{b_n\}$은 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, ⋯

그러므로 $a_1 = 0$

$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$

$a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 2$

$a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = 3$

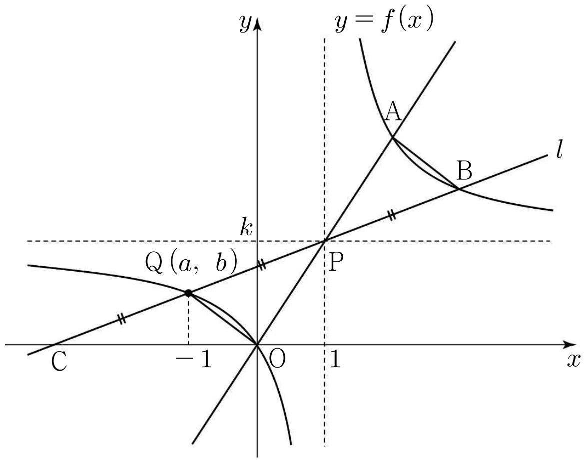
$a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = 4$

$a_{18} = a_{19} = a_{20} = 5$

$\sum_{k=1}^{20} a_k = 0 + (1 \times 4) + (2 \times 4) + (3 \times 4) + (4 \times 4) + (5 \times 3)$

$= 55$

30. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



직선 l과 함수 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자.
삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이고,
$S_2 = 2S_1$이므로
$\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{QP}} = \overline{\mathrm{CQ}}$ ⋯ ㉠
$\mathrm{P}(1, k)$이므로 $b = \frac{k}{2} = f(a)$

$\frac{k}{2} = \frac{k}{a-1} + k$이므로 $a = -1$

$\mathrm{Q}\left(-1,\ \frac{k}{2}\right)$
또한 ㉠에 의하여 $\mathrm{C}(-3,\ 0)$
직선 l의 방정식은 $kx - 4y + 3k = 0$이고
원점과 직선 l 사이의 거리
$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2 + 16}} = 1$이므로 $k^2 = 2$
따라서 $10k^2 = 20$