제 2 교시

수학 영역 (나형)

5지선다형

1. $\log_2 3+\log_2 \frac{2}{3}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ 에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 실수 x 에 대하여 $3^x=2$ 일 때, 3^x+3^{-x} 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_2 + a_3 = 6$ 일 때, a_6 의 값은? [3점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

6. 양수 x 에 대하여 $2x + \frac{8}{x}$ 의 최솟값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. $\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

8. 두 실수 a, b에 대하여 $12^a = 16$, $3^b = 2$일 때, $2^{\frac{4}{a}-\frac{1}{b}}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 함수 $f(x) = 2x^3 + ax + 3$에 대하여 $f'(1) = 7$을 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 실수 x에 대하여 두 조건 p, q를 각각

$$p : -1 < x < 2, \quad q : x^2 + ax + b < 0$$

이라 하자. p는 q이기 위한 필요충분조건일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}(a+3)x+1 & (x<0)\\(2-a)x+1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 일대일 대응이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{1+a_n}+1$$

을 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

13. 다항식 $(x+3)^n$을 $x+1$로 나눈 나머지를 R_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} R_n$의 값은? [3점]

① 46 ② 50 ③ 54 ④ 58 ⑤ 62

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+a & (x<1) \\ 2x^2+bx+4 & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, a^2+b^2의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 33 ② 35 ③ 37 ④ 39 ⑤ 41

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - n^2\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - n}{a_n + n^2}$의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

16. 정의역이 $\{x \mid x$는 $x \geq 0$인 모든 실수$\}$인 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax+2}{x^n+1}$$

가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

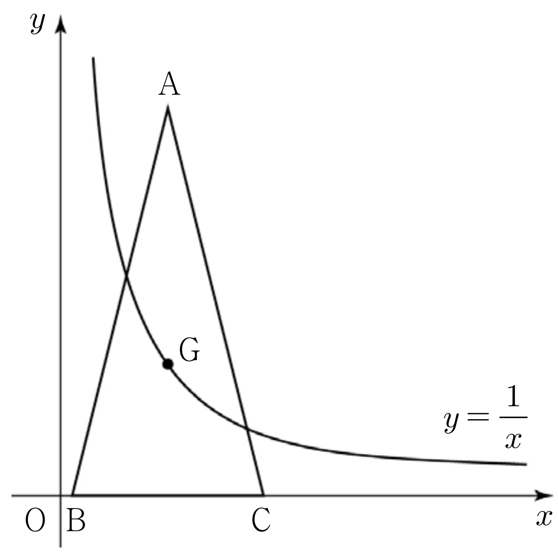
17. 정의역이 $\{x \mid x$는 $x \geq k$인 모든 실수$\}$이고, 공역이 $\{y \mid y$는 $y \geq 1$인 모든 실수$\}$인 함수

$$f(x)=x^2-2kx+k^2+1$$

에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{7}{8}$　② 1　③ $\frac{9}{8}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{11}{8}$

18. 그림과 같이 제1사분면 위에 있는 점 A와 x축 위의 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC의 무게중심 G가 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있다. 점 G의 x좌표가 t, 삼각형 ABC의 넓이가 $3t$일 때, 선분 BC의 길이를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t \to 1} \frac{f(t)-2t}{t-1}$의 값은? [4점]



① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

19. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = n+1$이다.
다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = \boxed{(가)}$,

(우변)$=\sum_{k=1}^{1} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{1} a_k = \boxed{(가)}$ 이므로

$(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m(m \geq 1)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{m} a_k \text{ 이므로}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1} + (a_{m+1})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{m} a_k + 2\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)a_{m+1} + (a_{m+1})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + \left(\boxed{(나)}\right)\sum_{k=1}^{m} a_k + (a_{m+1})^2$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + m^3 + 5m^2 + 7m + 4$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (a_k)^3 + (a_{m+1})^3 - (m^2 + 5m + 4)$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} (a_k)^3 - 2\sum_{k=1}^{m+1} a_k$$

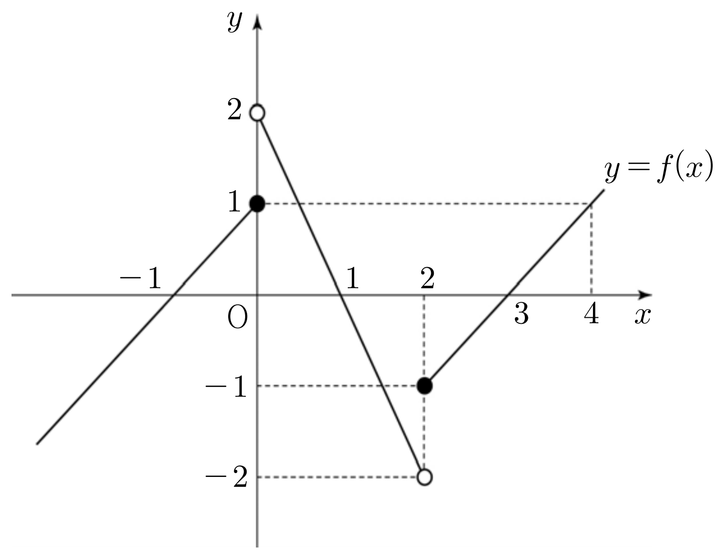
이다. 따라서 $n=m+1$일 때에도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $f(p)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f(1)=f(3)=0$) [4점]



<보 기>

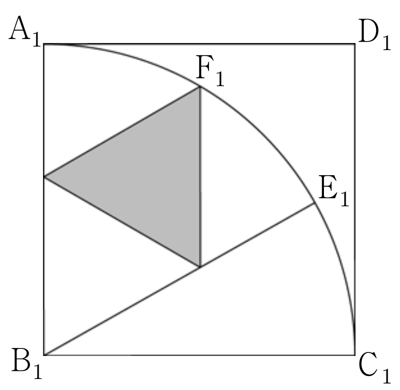
ㄱ. $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$

ㄴ. 함수 $f(x)f(x+3)$는 $x=0$에서 연속이다.

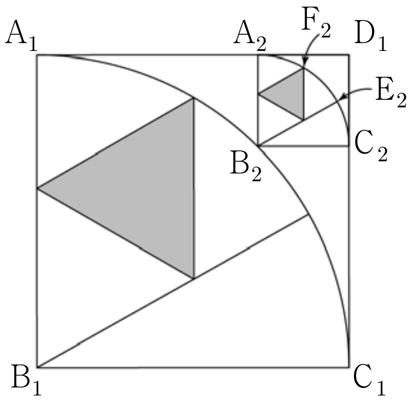
ㄷ. 방정식 $f(x)f(x+1)+2x-5=0$은 열린 구간 $(1,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

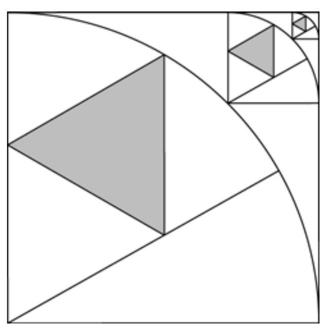
21. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서 중심을 B_1, 선분 B_1C_1 을 반지름으로 하고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 을 그린다. 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 의 호 C_1A_1 을 삼등분하는 두 점을 각각 E_1, F_1 이라 하고, 선분 B_1E_1 을 그린다. 점 F_1 을 한 꼭짓점으로 하고 부채꼴 $B_1E_1A_1$ 에 내접하는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 점 D_1 과 부채꼴 $B_1C_1A_1$ 의 호 C_1A_1 을 이등분하는 점 B_2 를 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$ 을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_1$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 정삼각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?
(단, $\angle A_nB_nE_n = 60^\circ$) [4점]



R_1



R_2


R_3

…

① $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ② $\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ③ $\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$
④ $\frac{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{21}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{21}$

단 답 형

22. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+3}-2^n}{3^n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 양의 실수 A 에 대하여 $\log A = 2.1673$ 일 때, A 의 값을 구하시오. (단, $\log 1.47 = 0.1673$ 으로 계산한다.) [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{1,\ 2\}$에 대하여 $B \subset X \subset A$를 만족시키는 모든 집합 X의 개수를 구하시오. [3점]

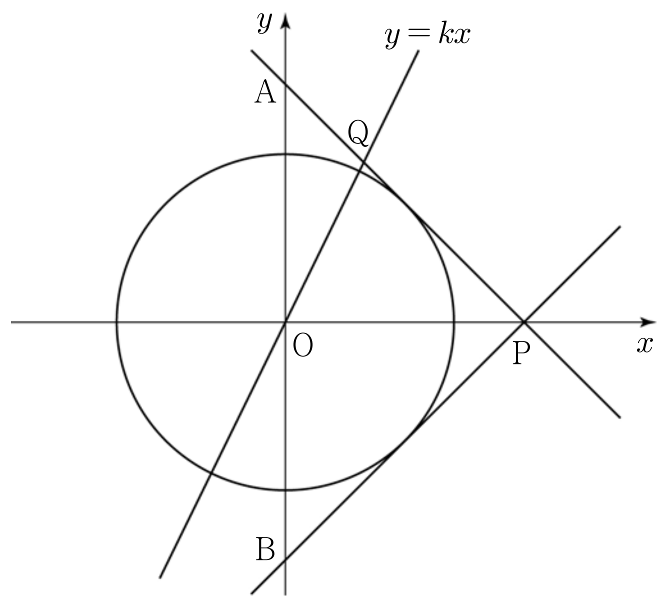
26. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2+1}=2, \qquad \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=5$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

27. $-2 \le m \le 2$, $1 \le n \le 16$ 인 두 정수 m, n 에 대하여 $\sqrt[4]{n^m}$ 이 유리수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 점 $\mathrm{P}(2, 0)$ 에서 원 $x^2+y^2=2$ 에 그은 두 접선이 y축과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $y=kx$ 가 직선 AP 와 만나는 점을 Q 라 하자. 삼각형 OQA 의 넓이를 S_1, 삼각형 OPQ 의 넓이를 S_2, 삼각형 OBP 의 넓이를 S_3 이라 하자. S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 에 대하여 $100k$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점, $k>1$ 이고, 점 A 의 y 좌표는 양수이다.) [4점]

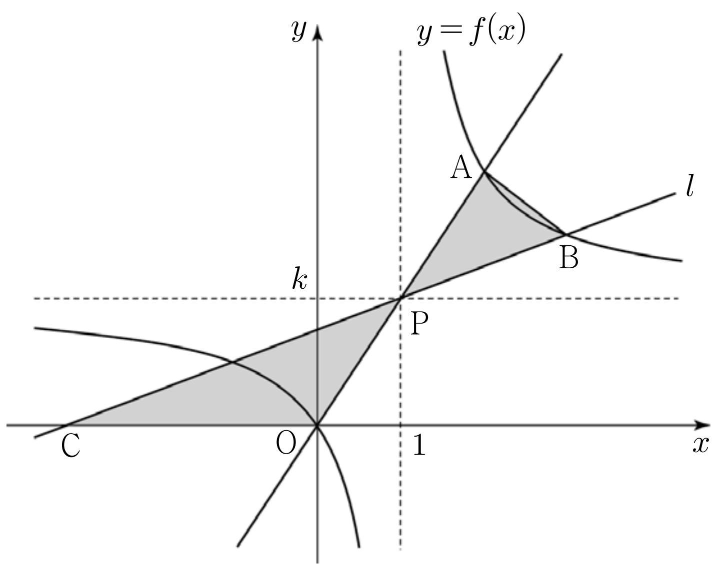


29. 다음과 같이 제n 행에 각각 첫째항이 1 이고 공비가 3 인 등비수열의 항을 첫째항부터 차례로 n 개 나열한다.

제1행	1
제2행	$1,\ 3$
제3행	$1,\ 3,\ 3^2$
제4행	$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3$
$\vdots$	$\vdots$
제n행	$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ \cdots,\ 3^{n-2},\ 3^{n-1}$

위와 같이 나열할 때, 제n 행의 모든 자연수 중에서 5 로 나눈 나머지가 3 인 자연수의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x-1}+k\,(k>1)$ 의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(1,\ k)$ 에 대하여 직선 OP 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A 라 하자. 점 P 를 지나고 원점으로부터 거리가 1 인 직선 l 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 B , x 축과 만나는 점을 C 라 하자. 삼각형 PBA 의 넓이를 S_1 , 삼각형 PCO 의 넓이를 S_2 라 할 때, $2S_1=S_2$ 이다. 상수 k에 대하여 $10k^2$ 의 값을 구하시오.
(단, O 는 원점이고, 직선 l 은 좌표축과 평행하지 않다.) [4점]



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.