2017학년도 대학수학능력시험 대비

2016학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	④	2	⑤	3	①	4	④	5	④
6	①	7	⑤	8	⑤	9	①	10	④
11	⑤	12	②	13	③	14	①	15	③
16	⑤	17	③	18	②	19	②	20	②
21	③	22	80	23	6	24	3	25	120
26	20	27	47	28	25	29	24	30	243

해 설

1. [출제의도] 벡터의 합을 계산한다.

$\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ 2)+(2,\ -3)$
$=(-1+2,\ 2+(-3))=(1,\ -1)$

2. [출제의도] 일반각의 삼각함수 값을 계산한다.

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta=-\frac{1}{3}$

3. [출제의도] 중복조합의 값을 계산한다.

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2!}=21$

4. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 정적분 값을 구한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)=\frac{1}{2}$$

5. [출제의도] 독립사건을 이해하여 확률을 구한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{16}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$ 이므로 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{5}{8}$

6. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구한다.

$x=2\sin\theta-1$, $y=4\cos\theta+\sqrt{3}$ 에서

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-4\sin\theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\sin\theta}{2\cos\theta}=-2\tan\theta$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$-2\tan\frac{\pi}{3}=-2\sqrt{3}$

7. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 D와 직선 BC 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{DH}}$ 의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{CD}}=1$ 이므로

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{DCH})$
$=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$
$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

따라서 구하는 거리는 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

8. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 확률을 구한다.

A, B가 주문한 것이 서로 다른 사건을 X,

A, B가 주문한 것이 모두 아이스크림인 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{2}{25}$

구하는 확률 $\mathrm{P}(Y|X)$는

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{10}$$

9. [출제의도] 정규분포를 이해하여 확률을 구한다.

1인당 수하물 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 4^2)$을 따른다. 이때, 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 1^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge17)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{17-15}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\ge2)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

신호 전송 범위 d와 수신 신호 강도 R 사이의 관계를 나타낸 그래프에서

$d=1$ 일 때 $R=-35$ 이므로

$-35=k-10\log1^n$, $k=-35$

$d=10$ 일 때 $R=-55$ 이므로

$-55=-35-10\log10^n$, $n=2$

수신 신호 강도가 -65 일 때

$-65=-35-10\log d^2$

따라서 신호 전송 범위는 $10^{\frac{3}{2}}$

11. [출제의도] 평면의 방정식의 성질을 이해하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구한다.

두 평면의 법선 벡터를 각각

$(1,\ \sqrt{2},\ -1)$, $(0,\ 0,\ 1)$이라 하면

두 평면이 이루는 각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta=\frac{|(1,\ \sqrt{2},\ -1)\bullet(0,\ 0,\ 1)|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$
$$=\frac{|-1|}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

표본비율 $\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$ 이고 표본의 크기는 100이므로 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$

$$5000(b-a)=5000\times2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{100}}$$
$$=5000\times2\times1.96\times\frac{4}{100}$$
$$=784$$

13. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 함수가 감소하는 구간을 구한다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+3x+1)+e^{x+1}(2x+3)$
$=e^{x+1}(x^2+5x+4)$

함수 $f(x)$가 감소하려면 $f'(x)<0$

$e^{x+1}(x^2+5x+4)<0$ 에서

$e^{x+1}>0$ 이므로 $x^2+5x+4<0$

함수 $f(x)$는 $-4<x<-1$ 에서 감소한다.

따라서 $b-a$의 최댓값은 3이다.

14. [출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$x^2+5xy-2y^2+11=0$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+5y+5x\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}=0$

$(5x-4y)\frac{dy}{dx}=-2x-5y$

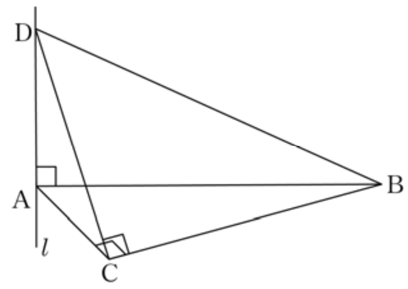
점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 2이므로

접선의 방정식 $y=2x+2$의

x 절편은 -1, y 절편은 2이다.

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times|-1|=1$

15. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 공간도형의 문제를 해결한다.



점 A를 지나고 두 직선 AB, BC에 수직인 직선 l은 평면 ABC에 수직이고, C가 구 위의 점이므로

$\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{DC}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 선분 AC의 길이는

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

16. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 그래프의 성질을 추론한다.

점 $(2a-p,\ a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(p)=q$, $f(2a-p)=a-q$ 에서

$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-q=a-\boxed{\frac{3^p}{3^p+3}}$ …… ㉠

이다. ㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$p=0$ 일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}=a-\frac{1}{4}$ …… ㉡

이고,

$p=1$ 일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{9}}=a-\frac{1}{2}$ …… ㉢

이다. ㉡, ㉢에서 ㉡－㉢을 정리하면

$\frac{6\times3^{2a}}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)}=\frac{1}{4}$ 에서

$(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)=24\times3^{2a}$

이므로 $3^{2a}=X(X>0)$이라 하면

$(X+3)(X+9)=24X$

$X^2-12X+27=0$

$X=3$ 또는 $X=9$

$3^{2a}=3$ 또는 $3^{2a}=9$

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\boxed{1}$

이다. 이때, ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a>\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=1$ 이다.

그러므로 $g(p)=\frac{3^p}{3^p+3}$, $m=9$, $n=1$

따라서 $(m-n)\times g(2)=(9-1)\times\frac{3^2}{3^2+3}=6$

17. [출제의도] 조합을 이해하여 확률을 구한다.

오각기둥의 10개의 꼭짓점 중 임의로 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$이다.

ⅰ) 면 ABCDE에서 1개, 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

면 ABCDE에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여

$5\times3=15$

ⅱ) 면 FGHIJ에서 1개, 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

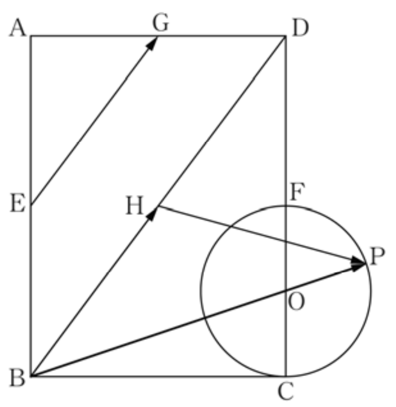
면 FGHIJ에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여

$5\times3=15$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $15+15=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$ 이다.

18. [출제의도] 벡터의 기하학적인 성질을 이용하여 두 벡터의 합의 크기의 최댓값을 추론한다.



$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$|\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HP}|$ 의 최댓값은 $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B에서 원 위의 점 P에 이르는 거리의 최댓값이다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값은

$\overline{BO}+2=\sqrt{6^2+2^2}+2=2\sqrt{10}+2$

19. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(2a-x)=f(x)$ 이므로

$\int_0^a\{f(2x)+f(2a-x)\}\,dx$

$=\int_0^a f(2x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx$

$\int_0^a f(2x)\,dx$ 에서 $2x=t$ 로 치환하면

$\int_0^a f(2x)\,dx=\int_0^{2a}f(t)\frac{1}{2}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}f(t)\,dt$

$=\frac{1}{2}\times2\int_0^a f(t)\,dt=8$

$\int_0^a f(2x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=8+8=16$

20. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

접선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{6}$

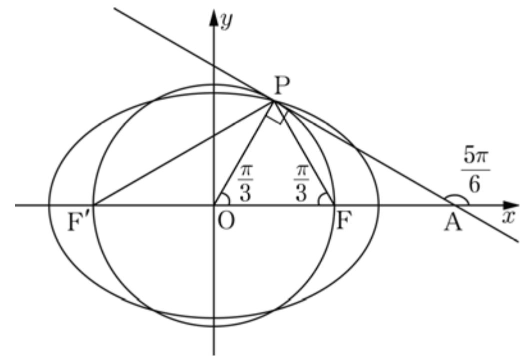
이고, 직선 OP는 접선과 수직이므로 $\angle\mathrm{POF}=\frac{\pi}{3}$

삼각형 POF는 정삼각형이므로

$\angle\mathrm{PFO}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{PF}}=6$

선분 F'F는 지름이므로 직각삼각형 FPF'에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}\times\tan\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$



따라서 두 점 F, F'은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의해 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=6+6\sqrt{3}$

21. [출제의도] 미분의 성질을 이용하여 그래프의 개형을 추론한다.

ㄱ. $g(-x)=\frac{\sin f(-x)}{-x}=\frac{\sin f(x)}{-x}=-g(x)$

이므로 모든 양의 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$ 이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

조건 (다)에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ 이고,

조건 (가)에서 $f'(x)=-f'(-x)$ 이므로

$f'(0)=0$ 이다.

$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin f(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right)$

$=1\times f'(0)=0$ (참)

ㄷ. $g(\alpha)=\frac{\sin f(\alpha)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}>0$ 이고,

$\lim_{x\to0}g(x)=0$ 이므로 $0<x<\alpha$ 에서

함수 $g(x)$가 증가하는 구간이 있다.

$g'(x)=\frac{xf'(x)\cos f(x)-\sin f(x)}{x^2}$ 에서

$g'(\alpha)=\frac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha)-\sin f(\alpha)}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}<0$

그러므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\alpha)$에서 $\frac{1}{\alpha}$ 보다 큰 극댓값을 갖는다.

따라서 방정식 $g(x)=\frac{1}{\alpha}$ 은 $0<x\le\alpha$ 에서

적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다.

$g(-x)=-g(x)$ 이므로 방정식 $g(x)=-\frac{1}{\alpha}$ 은

구간 $-\alpha\le x<0$에서 적어도 2개의 서로 다른

실근을 가지므로 방정식 $|g(x)|=\frac{1}{\alpha}$ 은 적어도

4개의 서로 다른 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 계산한다.

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$

$\mathrm{V}(6X)=36\mathrm{V}(X)=36\times\frac{20}{9}=80$

23. [출제의도] 치환적분을 계산한다.

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=\frac{\pi}{6}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f'(\sin x)\cos x\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f'(t)\,dt$

$=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)=6$

24. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

함수 $f(x)=e^{x-1}$에서 $e^{x-1}=1$일 때 $x=1$

즉, $g(1)=1$이다.

따라서 $f'(x)=e^{x-1}$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-2h)}{h}$

$=3g'(1)=\frac{3}{f'(1)}=\frac{3}{e^{1-1}}=3$

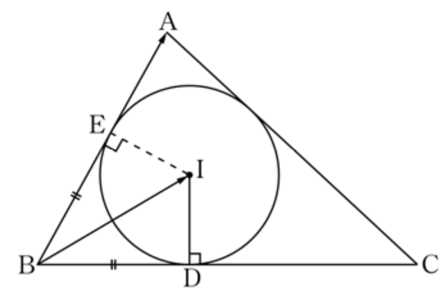
25. [출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 내적을 구한다.

점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}=8$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BI}}|\cos(\angle\mathrm{EBI})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=15\times8=120$



26. [출제의도] 합의 법칙을 이해하여 경우의 수를 구한다.

ⅰ) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a,b)로 가능한 경우의 수는 $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$의 6이다.

ⅱ) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a,b)로 가능한 경우의 수는 $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$, $(7,2)$, $(8,1)$의 8이다.

ⅲ) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 카네이션이 a송이, 장미가 b송이라 하면 (a,b)로 가능한 경우의 수는 $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$의 6이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $6+8+6=20$

27. [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한다.

점 P가 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\times27=9$

점 Q가 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{2}{3}\times\triangle\mathrm{ABP}=\frac{2}{3}\times9=6$

점 Q가 선분 BH의 중점이므로

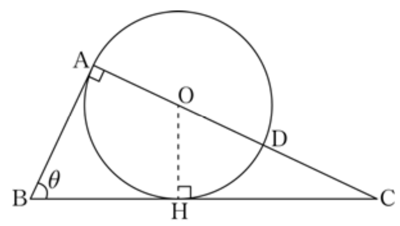
$\triangle\mathrm{ABH}=2\times\triangle\mathrm{ABQ}=2\times6=12$

삼각형 ABD 의 평면 α 로의 정사영이
삼각형 ABH 이므로

$\triangle \mathrm{ABD} \times \cos\theta = \triangle \mathrm{ABH}$ 에서 $\cos\theta = \dfrac{12}{35}$

따라서 $p+q=47$

28. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 추론한다.



선분 AD 의 중점 O 는 원의 중심이고, 점 O 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BH}} = \cos\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{CH}} = 1-\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CA}} = \sin\theta$ 이고 $\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{CA}} \times \overline{\mathrm{CD}}$ 이므로

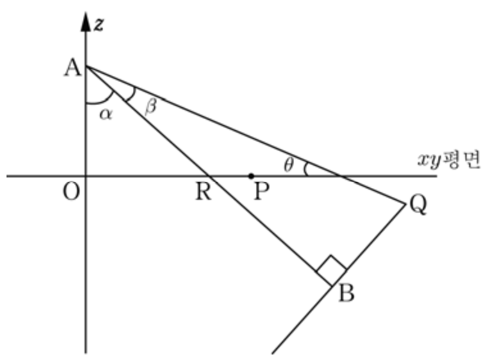
$(1-\cos\theta)^2 = \sin\theta \times \overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin\theta}}{\theta^3}$$
$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$
$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\theta^3\sin\theta(1+\cos\theta)^2}$$
$$= \lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right) = \frac{1}{4}$$

따라서 $k=\dfrac{1}{4}$ 이므로 $100k=25$

29. [출제의도] 공간벡터의 성질을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 크기가 일정하므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 는 두 벡터가 이루는 각이 최소일 때 최댓값을 갖는다. 다섯 개의 점 O, A, B, P, Q 가 한 평면에 있도록 그림으로 나타내면 다음과 같고
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 는 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ 와 선분 AQ 의 xy 평면으로의 정사영의 길이의 곱과 같다.



그림에서 $\angle\mathrm{BAO}=\alpha$, $\angle\mathrm{QAB}=\beta$, xy 평면과 직선 AQ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \sin(\alpha+\beta)$ 이므로 선분 AQ 의 xy 평면으로의 정사영의 길이는 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin(\alpha+\beta)$ 이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2^2+4^2+(-4)^2} = 6$, $\overline{\mathrm{BQ}} = 2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AQ}} = 2\sqrt{10}$

그러므로 $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

방향벡터가 $(2,\ 4,\ -4)$ 이고 점 $\mathrm{A}(0,0,2)$ 를 지나는 직선 AB 의 방정식은 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-2}{-4}$ 이다.

이 직선과 xy 평면과의 교점을 R 라 하면 직선 AB 의 방정식에서 $z=0$ 일 때이므로
점 R 의 좌표는 $(1,2,0)$ 이다.

$\overline{\mathrm{AR}} = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$, $\overline{\mathrm{AO}} = 2$ 이므로 $\overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{5}$

그러므로 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$

따라서

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 2\sqrt{10}\times\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$= \frac{6\sqrt{5}+4}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\cos\theta$$
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 3\times\frac{6\sqrt{5}+4}{3} = 6\sqrt{5}+4$$

따라서 $a=4$, $b=6$ 이므로 $ab=4\times6=24$

30. [출제의도] 이항정리를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

a_{p+1} 부터 a_9 까지의 $(9-p)$ 개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9 는 $a_p=8$ 보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$ 이다.

ⅰ) 첫 번째와 p 번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$ 가 적힌 공을 제외한 5 개의 공 중에서 $(p-2)$ 개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_{p-2}$ 이다.

ⅱ) ⅰ)에서 남아 있는 공 중 p 번째와 q 번째 사이의 공을 꺼내는 경우의 수는 $a_q=1$, $a_9=9$ 가 적힌 공을 제외한 $(9-p-2)=(7-p)$ 개의 공 중에서 $(q-p-1)$ 개의 공을 꺼내는 조합의 수이므로 ${}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$ 이다.

ⅲ) ⅰ)과 ⅱ)의 과정을 거치면 q 번째와 9 번째 사이의 공은 정해진다.

이때, p 가 정해지면 q 가 취할 수 있는 값은 $p+1$ 부터 8 까지이므로 ⅱ)에 의해 $\displaystyle\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1}$

$q-p-1=k$ 로 놓으면
$q=p+1$ 일 때 $k=0$ 이고,
$q=8$ 일 때 $k=7-p$ 이므로

$$\sum_{q=p+1}^{8} {}_{7-p}\mathrm{C}_{q-p-1} = \sum_{k=0}^{7-p} {}_{7-p}\mathrm{C}_k = (1+1)^{7-p} = 2^{7-p}$$

p 의 값은 2 부터 7 까지 취할 수 있다.

그러므로 구하는 값은 ⅰ)에 의해 $\displaystyle\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p}$

따라서 $p-2=r$ 로 놓으면
$p=2$ 일 때 $r=0$ 이고, $p=7$ 일 때 $r=5$ 이므로

$$\sum_{p=2}^{7} {}_5\mathrm{C}_{p-2}2^{7-p} = \sum_{r=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_r 2^{5-r} = (2+1)^5 = 243$$

[다른 풀이]

구하는 경우의 수는 $a_1=2$, $a_p=8$, $a_q=1$, $a_9=9$ 가 적힌 4개의 공을 제외한 5 개의 공을 첫 번째와 p 번째 사이, p 번째와 q 번째 사이, q 번째와 9 번째 사이로 나누는 경우의 수와 같다. 그러므로

$$\begin{aligned}
&{}_5\mathrm{C}_0\times({}_5\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_5+{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_3\\
&\qquad+{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_5\cdot1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_1\times({}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_4\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2\\
&\qquad+{}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_4\cdot1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_2\times({}_3\mathrm{C}_0\cdot{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_3\cdot1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_3\times({}_2\mathrm{C}_0\cdot{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2\cdot1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_4\times({}_1\mathrm{C}_0\cdot{}_1\mathrm{C}_1+{}_1\mathrm{C}_1\cdot1)\\
&+{}_5\mathrm{C}_5\times(1\cdot1)=243
\end{aligned}$$

[다른 풀이]

a_{p+1} 부터 a_9 까지의 $(9-p)$ 개의 수 중에서 최솟값은 a_q, 즉 $a_q=1$, 9 는 $a_p=8$ 보다 큰 수이므로 최댓값은 $a_9=9$ 이다. 3 이 적힌 공을 꺼내는 경우는 첫 번째와 p 번째 사이, p 번째와 q 번째 사이, q 번째와 9 번째 사이 중 하나이므로 그 경우의 수는 3 이다. 4, 5, 6, 7 이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 3 이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $3^5=243$ 이다.