2017학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[가형] •

정 답

1	②	2	①	3	③	4	⑤	5	④
6	②	7	⑤	8	④	9	⑤	10	⑤
11	③	12	②	13	④	14	①	15	③
16	③	17	⑤	18	①	19	④	20	②
21	①	22	17	23	4	24	13	25	15
26	36	27	225	28	60	29	26	30	27

해 설

1. [출제의도] 집합의 원소들의 합 계산하기

$A=\{1,2,5,7\}$, $B=\{3,5,7\}$이므로

$A\cap B=\{5,7\}$이다. 따라서 원소의 합은 12이다.

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_6 2+\log_6 3=\log_6(2\times3)=\log_6 6=1$

3. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+5)=3$

4. [출제의도] 수열의 합 계산하기

$\sum\limits_{k=1}^{30}(a_k+2b_k)=\sum\limits_{k=1}^{30}a_k+2\sum\limits_{k=1}^{30}b_k=5+2\times20=45$

5. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

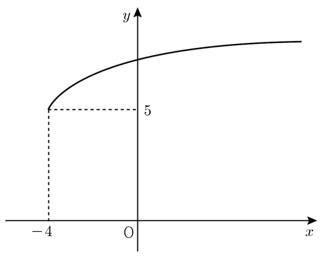
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=2$, $a_3=ar^2=4$에서 $a=1$, $r=2$이다.

따라서 $a_6=ar^5=32$이다.

6. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

무리함수 $y=\sqrt{x+4}+5$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $x=-3$일 때 최솟값 $\sqrt{-3+4}+5=6$을 갖는다.

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$x\to0-$일 때, $f(x)\to3$이므로 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=3$이다.

또한 $x\to1+$일 때, $f(x)\to3$이므로 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3$이다. 따라서 $\lim\limits_{x\to0-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3+3=6$이다.

8. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 B는 집합 U의 부분집합 중 원소 $2,3,5,6$을 모두 포함하지 않는 집합이다.

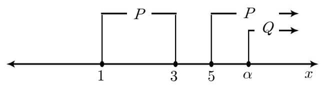
따라서 집합 B의 개수는 $2^{10-4}=2^6=64$이다.

9. [출제의도] 명제의 필요조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

$Q\subset P$가 성립해야 한다.



따라서 $\alpha\ge5$이므로 실수 α의 최솟값은 5이다.

10. [출제의도] 유리함수와 그 역함수 이해하기

함수 $y=\frac{2x+5}{x+3}$를 x에 대하여 풀면 $x=\frac{-3y+5}{y-2}$이고

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{-3x+5}{x-2}$이다.

$f^{-1}(x)=\frac{-3x+5}{x-2}=\frac{-3(x-2)-1}{x-2}=\frac{-1}{x-2}-3$이므로

함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,-3)$에 대하여 대칭이다. 따라서 $p=2$, $q=-3$이므로 $p-q=5$이다.

[다른 풀이]

$f(x)=\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2(x+3)-1}{x+3}=\frac{-1}{x+3}+2$이므로

$f(x)$의 그래프는 점 $(-3,2)$에 대하여 대칭이다.

또한 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 $(-3,2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

점 $(2,-3)$이므로 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,-3)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=2$, $q=-3$이므로 $p-q=5$이다.

11. [출제의도] 항등함수 이해하기

$f:X\to X$가 항등함수가 되기 위해서는

$f(-2)=-2$, $f(-1)=-1$, $f(3)=3$이어야 한다.

$x\ge0$일 때 $f(3)=3$을 만족하고,

$x<0$일 때 $f(x)=ax^2+bx-2$이므로

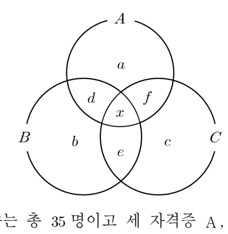
$f(-2)=4a-2b-2=-2$, $f(-1)=a-b-2=-1$이다.

따라서 $a=-1$, $b=-2$이므로 $a+b=-3$이다.

12. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 외적문제 해결하기

자격증 A를 취득한 수강생의 집합을 A, 자격증 B를 취득한 수강생의 집합을 B, 자격증 C를 취득한 수강생의 집합을 C라 하자.

각 영역에 속하는 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 아래 그림과 같다.



수강생 수는 총 35명이고 세 자격증 A, B, C 중에서 어느 것도 취득하지 못한 수강생이 3명이므로 $n(A\cup B\cup C)=35-3=32$이다.

이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없으므로 $x=0$이다.

자격증 A, B, C를 취득한 수강생이

각각 21명, 18명, 15명이므로

$a+d+f=21\cdots①$

$b+d+e=18\cdots②$

$c+e+f=15\cdots③$

①+②+③을 하면

$a+b+c+2(d+e+f)=54\cdots④$ 이고

$n(A\cup B\cup C)=a+b+c+d+e+f=32\cdots⑤$ 이다.

④−⑤를 하면 $d+e+f=22$이다.

따라서 세 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생 수는 22이다.

13. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 외적문제 해결하기

$R=k\left(\frac{W}{D+10}\right)^{\frac{1}{3}}$에서

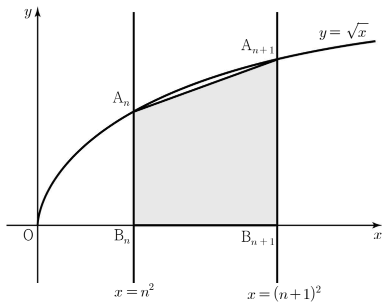
$R_1=k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$이고, $R_2=k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}$

이다.

$\frac{R_1}{R_2}=\frac{k\left(\frac{160}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}{k\left(\frac{p}{d+10}\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{160}{p}\right)^{\frac{1}{3}}=2$이고

$\sqrt[3]{\frac{160}{p}}=2$에서 $\frac{160}{p}=8$이고 $p=20$이다.

14. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 도형 문제 해결하기



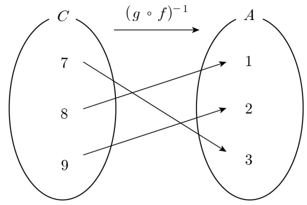
사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$은 사다리꼴이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times(n+n+1)\times\{(n+1)^2-n^2\}=\frac{1}{2}(2n+1)^2$

이다. 따라서

$\sum\limits_{n=1}^{10}S_n=\sum\limits_{n=1}^{10}\left(2n^2+2n+\frac{1}{2}\right)=885$이다.

15. [출제의도] 일대일 대응과 합성함수를 이용한 함숫값 문제 해결하기



그림으로부터

$(g\circ f)(1)=8$, $(g\circ f)(2)=9$, $(g\circ f)(3)=7$이다.

$g(6)=9$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $f(2)=6$이다. 또한 $f(1)=4$, $f(2)=6$이고 함수 f는 일대일 대응이므로 $f(3)=5$이다.

$(g\circ f)(3)=7$에서 $f(3)=5$이므로 $g(5)=7$이다.

따라서 $f(2)+g(5)=6+7=13$이다.

16. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 도형 문제 해결하기

직선 OP의 기울기가 $\frac{2n^2}{n}=2n$이므로 점 $\mathrm{P}(n,2n^2)$을 지나고 직선 OP에 수직인 직선 l의 방정식은

$$y-2n^2=-\frac{1}{2n}(x-n)$$

이고 점 Q의 좌표는 $\left(0,2n^2+\frac{1}{2}\right)$이다.

또, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{n^2+(2n^2)^2}=\sqrt{4n^4+n^2}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OQ}})=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4n^4+n^2}-\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^4+n^2})^2-\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{4n^4+n^2}+\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{-n^2 - \frac{1}{4}}{\sqrt{4n^4+n^2} + \left(2n^2 + \frac{1}{2}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{-1 - \frac{1}{4n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} + \left(2 + \frac{1}{2n^2}\right)} = -\dfrac{1}{4}$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}} - \overline{\mathrm{OQ}}) = -\dfrac{1}{4}$ 이다.

17. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 명제의 참, 거짓 추론하기

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것들이다.

$a=3$일 때, $\sqrt[3]{-9}$, $\sqrt[3]{-3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{9}$ 이고

$a=4$일 때, $\pm\sqrt[4]{3}$, $\pm\sqrt[4]{9}$ 이므로

집합 X를 구하면

$X = \{\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt[4]{3},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt{3}\}$

이다.

ㄱ. $\sqrt[3]{-9} \in X$ (참)

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다. (참)

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은

$\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3}$ 이므로 모든 원소의 곱의 값은

$3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7}$ 이다. (참)

18. [출제의도] 수학적 귀납법 추론하기

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$= \sum_{k=1}^{1}(a_k a_{k+1})^2 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$,

(우변)$= \sum_{k=1}^{1}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{1}(a_{k+1})^2 + 2(a_2 - 1) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(ii) $n=m(m\ge 1)$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(a_k a_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^{m}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2 + 2(a_{m+1}-1)$

이므로

$\sum_{k=1}^{m+1}(a_k a_{k+1})^2 = \sum_{k=1}^{m}(a_k a_{k+1})^2 + (a_{m+1}a_{m+2})^2$

$= \sum_{k=1}^{m}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2 + 2(a_{m+1}-1) + (a_{m+1}a_{m+2})^2$

$= \sum_{k=1}^{m}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2 + 2\left(\dfrac{1}{m+1}-1\right) + \left\{\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}^2$

$= \sum_{k=1}^{m}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2 + 2\left(\dfrac{1}{m+1}-1\right) + \left(\dfrac{1}{m+1} - \dfrac{1}{m+2}\right)^2$

$= \sum_{k=1}^{m}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m}(a_{k+1})^2 + 2\left\{\dfrac{1}{m+1} - 1 - \dfrac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}$

$\quad + \left(\dfrac{1}{m+1}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{m+2}\right)^2$

$= \sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m+1}(a_{k+1})^2 + 2\left\{\dfrac{1}{m+1} - 1 - \boxed{\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}}\right\}$

$= \sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m+1}(a_{k+1})^2 + 2\left(\dfrac{1}{m+2} - 1\right)$

$= \sum_{k=1}^{m+1}(a_k)^2 + \sum_{k=1}^{m+1}(a_{k+1})^2 + 2(a_{m+2}-1)$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

(*)이 성립한다.

이 과정에서 $p = \dfrac{1}{4}$, $f(m) = \dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$ 이므로

$\dfrac{p}{f(14)} = 60$ 이다.

19. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

$a_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1}$ 에서

(i) $0 < \dfrac{k}{10} < 1$ 일 때, 즉 $0<k<10$ 일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1} = \dfrac{2\times 0 + 0}{0+0+1} = 0$

이다.

(ii) $\dfrac{k}{10} = 1$ 일 때, 즉 $k=10$ 일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\times 1^{2n+1} + 1^n}{1^{2n} + 1^n + 1} = \dfrac{3}{3} = 1$

(iii) $\dfrac{k}{10} > 1$, 즉 $k > 10$ 일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1} + \left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n} + \left(\frac{k}{10}\right)^n + 1}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\times\left(\frac{k}{10}\right) + \frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}}{1 + \frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n} + \frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}}} = \dfrac{\frac{k}{5}+0}{1+0+0} = \dfrac{k}{5}$

이다.

따라서 $a_k = \begin{cases} 0 & (k<10) \\ 1 & (k=10) \\ \dfrac{k}{5} & (k>10) \end{cases}$ 이다.

그러므로

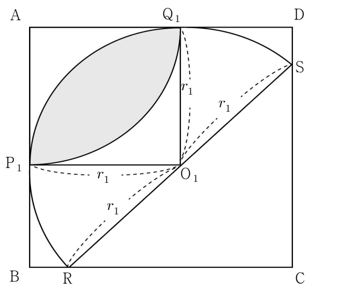
$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k + a_{10} + \sum_{k=11}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{9} 0 + 1 + \sum_{k=11}^{20} \dfrac{k}{5}$

$= 1 + \sum_{k=1}^{10}\left(2 + \dfrac{k}{5}\right) = 1 + 20 + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{10\times 11}{2} = 32$

이다.

20. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

첫 번째 반원이 변 BC와 만나는 점을 R, 변 CD와 만나는 점을 S, 반지름의 길이를 r_1이라 하자.



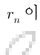
삼각형 RCS는 직각이등변삼각형이고

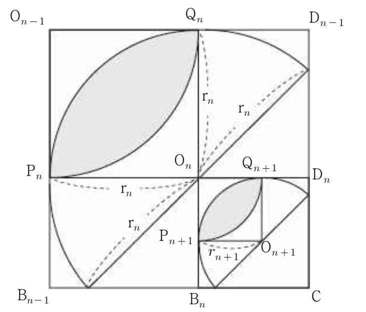
점 $\mathrm{O_1}$은 빗변의 중점이므로 $\overline{\mathrm{CO_1}} = \overline{\mathrm{SO_1}} = \overline{\mathrm{RO_1}} = r_1$ 이다.

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AO_1}} + \overline{\mathrm{CO_1}}$ 이므로 $4\sqrt{2} = r_1\sqrt{2} + r_1$ 이다.

따라서 $r_1 = 4(2-\sqrt{2})$ 이고,

$S_1 = 2\times\left(\dfrac{1}{4}\pi r_1^2 - \dfrac{1}{2}r_1^2\right) = 16(\pi-2)(\sqrt{2}-1)^2$ 이다.

그림 R_n에서 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻은 과정에서 새로 얻은  모양의 넓이를 a_n이라 하자.



$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{C}} = \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}} + \overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{C}}$ 이므로 $r_n = \sqrt{2}\,r_{n+1} + r_{n+1}$

$r_{n+1} = (\sqrt{2}-1)r_n$ 이다. 그러므로

$a_{n+1} : a_n = (\sqrt{2}-1)^2 : 1^2$ 에서 $a_{n+1} = (\sqrt{2}-1)^2 a_n$ 이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $16(\pi-2)(\sqrt{2}-1)^2$ 이고 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2$ 인 등비수열이므로

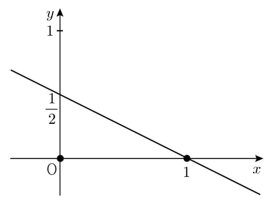
$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \dfrac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{2(\sqrt{2}-1)}$

$= (8\sqrt{2}-8)(\pi-2)$

이다. 따라서 $p=q=8$ 이므로 $p+q=16$ 이다.

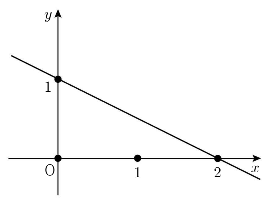
21. [출제의도] 연립부등식의 영역과 수열을 이용하여 수열의 합 문제 해결하기

$n=1$일 때,



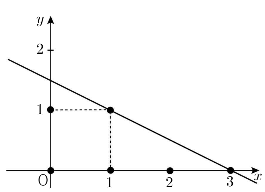
$a_1 = 1+1$

$n=2$일 때,



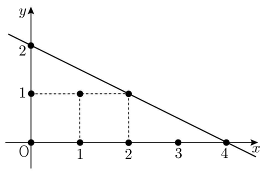
$a_2 = 1+1+2$

$n=3$일 때,



$a_3 = 1+1+2+2$

$n=4$일 때,

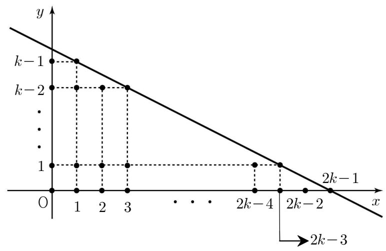


$a_4 = 1+1+2+2+3$

⋮

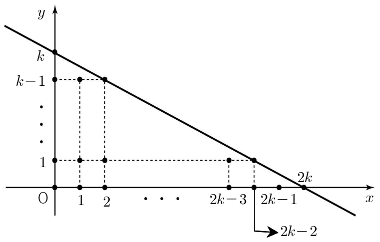
이다. 따라서 $n=2k-1$일 때와 $n=2k$일 때로 나누어 a_n을 구하면 다음과 같다.

ⅰ) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때



$a_{2k-1} = 1+1+2+2+\cdots+k+k = 2\times\frac{k(k+1)}{2} = k^2+k$

ⅱ) $n=2k$ (k는 자연수)일 때,



$a_{2k} = 1+1+2+2+\cdots+k+k+(k+1)$

$\quad = 2\times\frac{k(k+1)}{2}+k+1 = k^2+2k+1$

ⅰ), ⅱ)에 의해

$\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum_{k=1}^{10}(2k^2+3k+1) = 945$이다.

22. [출제의도] 합성함수를 이용하여 함숫값 계산하기

$f(x)=2x+3$이므로 $(f\circ f)(2) = f(f(2)) = f(7) = 17$이다.

23. [출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+8n+10}-n\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+8n+10}-n\right)\left(\sqrt{n^2+8n+10}+n\right)}{\sqrt{n^2+8n+10}+n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{8n+10}{\sqrt{n^2+8n+10}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{10}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n}+\frac{10}{n^2}}+1} = 4$

24. [출제의도] 급수의 수렴 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-5)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-5)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n = 5$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3) = 2\times\lim_{n\to\infty}a_n+3 = 13$이다.

25. [출제의도] 절대부등식의 성질 이해하기

$a>1$이므로 $a-1>0$이다.

절대부등식의 성질에 의해

$9a+\frac{1}{a-1} = 9(a-1)+\frac{1}{a-1}+9$

$\ge 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+9 = 2\times3+9 = 15$

(단, 등호는 $a=\frac{4}{3}$일 때 성립한다.)

이므로 $9a+\frac{1}{a-1}$의 최솟값은 15이다.

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구하는 문제 해결하기

로그의 정의로부터 $a=2^x$, $b=2^y$이다.

$\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}} = \log_8 2^{\frac{x}{y}}+\log_8 2^{\frac{y}{x}} = \log_8 2^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$

$= \log_8 2^{\frac{x^2+y^2}{xy}} = \frac{x^2+y^2}{3xy} = \frac{4xy}{3xy} = \frac{4}{3}$

이므로 $k=\frac{4}{3}$이다. 따라서 $27k=36$이다.

[다른 풀이]

$\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}} = \log_{2^3} a^{\frac{1}{y}}+\log_{2^3} b^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{3y}\log_2 a+\frac{1}{3x}\log_2 b$

$= \frac{x}{3y}+\frac{y}{3x} = \frac{x^2+y^2}{3xy} = \frac{4}{3}$

이므로 $k=\frac{4}{3}$이다. 따라서 $27k=36$이다.

27. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^a=4^b=5^c$이므로 $4^{ab}=5^{ac}$이고 $3^{ac}=4^{bc}$이다.

$ac=2$이므로 $4^{ab}=5^2$이고 $4^{bc}=3^2$이다.

따라서 $4^{ab+bc}=4^{ab}\times4^{bc}=5^2\times3^2=225$이다.

[다른 풀이]

$4^{ab+bc}=(4^b)^a\times(4^b)^c=(5^c)^a\times(3^a)^c=15^{ac}=15^2=225$

28. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

(가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재하므로 (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$에서 $\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$이고 $\lim_{x\to-2}(x^2-4)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(f(x)-5x)=0$이고 $\lim_{x\to-2}(f(x)-5x)=0$이다.

즉, $f(2)-10=0$, $f(-2)+10=0$이다.

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-5x=(x+2)(x-2)g(x)$라 하자. (단, $g(x)$는 다항식)

(나)에서 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-3x+1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-(3x-1)\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1}$

의 값이 존재하기 위해서는 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같아야 하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 9인 이차함수가 되어야 한다.

따라서 $f(x)-5x=9(x+2)(x-2)$이므로 $f(3)=60$이다.

29. [출제의도] 집합의 연산과 수열을 이용하여 미지의 값 추론하기

주어진 조건을 만족하는 집합 A_k를 구하여 차례대로 나열해보면

$A_1=\{3,5,7,9,11\}$

$A_2=\{9,11,13,\cdots,21\}$

$A_3=\{15,17,19,\cdots,31\}$

$A_4=\{21,23,25,\cdots,41\}$

⋮

$A_k=\{6k-3,6k-1,6k+1,\cdots,10k+1\}$

이다.

따라서 $A_{15}=\{87,89,91,\cdots,151\}$이다.

$p>15$에서 $A_{15}\cap A_p=\varnothing$을 만족하려면 집합 A_p의 가장 작은 원소 $(6p-3)$이 집합 A_{15}의 가장 큰 원소보다 커야 하므로 $6p-3>151$이어야 한다.

$p>\frac{154}{6}=25.6\cdots$이므로 자연수 p의 최솟값은 26이다.

30. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 함수의 연속성 문제 해결하기

(ⅰ) $t<8$일 때,

$f(x)=x^2-18x+2(x-t)+80=x^2-16x-2t+80$

$\quad=(x-8)^2-2t+16$

이므로 $8\le x\le10$에서 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최솟값 $f(8)=-2t+16$을 갖는다.

따라서 $g(t)=-2t+16$이다.

(ⅱ) $8\le t<10$일 때,

(ㄱ) $x<t$인 경우

$f(x)=x^2-18x-2(x-t)+80=x^2-20x+2t+80$

$\quad=(x-10)^2+2t-20$

(ㄴ) $x\ge t$인 경우

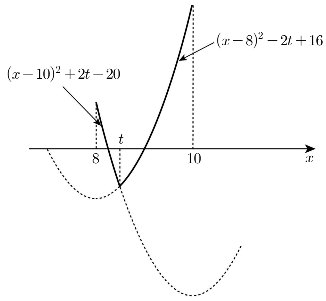
$f(x)=x^2-18x+2(x-t)+80=x^2-16x-2t+80$

$\quad=(x-8)^2-2t+16$

(ㄱ), (ㄴ)에 의해

$f(x)=\begin{cases}(x-10)^2+2t-20 & (8\le x<t)\\(x-8)^2-2t+16 & (t\le x\le10)\end{cases}$

이다. 이때 $8\le x\le10$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최솟값 $f(t)=(t-9)^2-1$을 갖는다.

따라서 $g(t)=(t-9)^2-1$이다.

(ⅲ) $t\ge10$일 때,

$f(x)=x^2-18x-2(x-t)+80=x^2-20x+2t+80$

$\quad=(x-10)^2+2t-20$

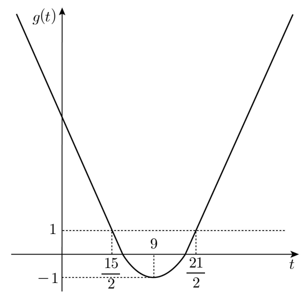
이므로 $8\le x\le10$에서 함수 $f(x)$는 $x=10$에서 최솟값 $f(10)=2t-20$을 갖는다.

따라서 $g(t)=2t-20$이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 함수 $g(t)$는

$g(t)=\begin{cases}-2t+16 & (t<8)\\(t-9)^2-1 & (8\le t<10)\\2t-20 & (t\ge10)\end{cases}$

이고 함수 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



① $g(t)=-1$ ($t=9$)일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=1$이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$이다.

② $-1<g(t)<1$ ($\frac{15}{2}<t<9$ 또는 $9<t<\frac{21}{2}$)일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=0$이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+0}=1$이다.

③ $g(t)=1$ ($t=\frac{15}{2}$ 또는 $t=\frac{21}{2}$)일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=1$ 이므로

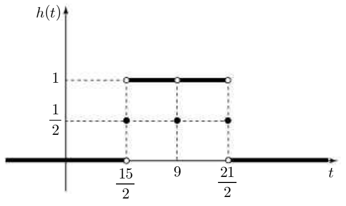
$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ 이다.

④ $g(t)>1\left(t<\frac{15}{2}\right.$ 또는 $\left.t>\frac{21}{2}\right)$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\{g(t)\}^{2n}=\infty$ 이므로

$h(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(t)\}^{2n}}=0$ 이다.

그러므로 함수 $h(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $h(t)$는 $t=\frac{15}{2},\ 9,\ \frac{21}{2}$에서 불연속이므로

모든 a의 값의 합은 $9+\frac{15}{2}+\frac{21}{2}=27$이다.