

2017학년도 9월 고1 전국연합학력평가

정답 및 해설

수학 영역

1	③	2	①	3	④	4	⑤	5	④
6	②	7	③	8	⑤	9	③	10	⑤
11	①	12	②	13	②	14	④	15	①
16	②	17	④	18	②	19	③	20	⑤
21	①	22	53	23	40	24	32	25	2
26	6	27	240	28	27	29	33	30	25

수학 영역

해설

1. [출제의도] 교집합 원소의 개수 구하기
 $A \cap B = \{1, 2, 4\}$ 이므로 원소의 개수는 3

2. [출제의도] 다항식의 연산 계산하기
 $A + 2B = 5x^2 - 9x + 1 + 4x^2 + 6x - 8$
 $= 9x^2 - 3x - 7$

3. [출제의도] 다항식의 인수분해 계산하기
 $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ 이므로
 $a = 2, b = 2$
 따라서 $a + b = 4$

4. [출제의도] 연립방정식 계산하기

$$\begin{cases} y = 2x + 3 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y = 2 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면
 $x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0$
 따라서 $x = -1, y = 1$ 이므로 $a + 3b = 2$

5. [출제의도] 절댓값이 있는 부등식 이해하기
 $|x+a| \leq 8$ 을 풀면
 $-8 - a \leq x \leq 8 - a$
 이때 주어진 부등식의 해가 $b \leq x \leq 2$ 이므로
 $a = 6, b = -14$
 따라서 $a - b = 20$

6. [출제의도] 조건과 진리집합 이해하기
 조건 p 의 진리집합 $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 조건 $\sim p$ 의 진리집합 $P^C = \{5, 7\}$
 따라서 모든 원소의 합은 12

7. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기
 a^2 이 최솟값이고 bc 가 최댓값일 때
 $a^2 - bc$ 는 최솟값을 갖는다.
 a^2 의 최솟값은 $a = 5i$ 일 때 -25 ,
 bc 의 최댓값은 $b = -4i, c = 5i$ 또는
 $b = 5i, c = -4i$ 일 때 20
 따라서 $a^2 - bc$ 의 최솟값은 -45

8. [출제의도] 곱셈공식 이해하기

$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 3^2 - 7$ 이므로 $ab = 1$
 $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = 7^2 - 2 \times 1^2$
 따라서 $a^4 + b^4 = 47$

9. [출제의도] 허근의 성질 이해하기
 $x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3) = 0$ 이므로
 z_1, z_2 는 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 허근이다.
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $z_1 z_2 = 3$
 이고 $z_1 = \bar{z}_2, z_2 = \bar{z}_1$
 따라서 $z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 2z_1 z_2 = 6$

10. [출제의도] 세 점을 지나는 원의 방정식 이해하기
 원의 방정식 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 에 주어진 세 점의 좌표를 대입하면

$$\begin{cases} 4 - 2a + c = 0 \\ 16 + 4a + c = 0 \\ 5 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

위 식을 연립하여 풀면
 $a = -2, b = \frac{5}{2}, c = -8$

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{5}{2}y - 8 = 0$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2$$

따라서 $p = 1, q = -\frac{5}{4}$ 이므로 $p + q = -\frac{1}{4}$

11. [출제의도] 원의 성질 이해하기
 선분 AB의 수직이등분선을 l 이라 하면 직선 l 은 선분 AB의 중점 $M\left(2, \frac{a+1}{2}\right)$ 을 지나고, 주어진 원의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-2, 5)$ 를 지난다.

직선 l 의 기울기는 $\frac{a-9}{8}$

직선 AB의 기울기는 $\frac{a-1}{2}$

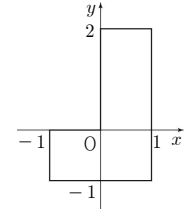
두 직선이 서로 수직이므로 $\frac{a-9}{8} \times \frac{a-1}{2} = -1$
 따라서 $a = 5$

12. [출제의도] 미지수가 3개인 방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기
 포도 1송이의 가격을 x 원, 사과 1개의 가격을 y 원, 바나나 1송이의 가격을 z 원이라 하면

$$\begin{cases} 2x + y = 5500 \\ 2y + z = 6000 \\ 2z + x = 8000 \end{cases}$$

위 식을 연립하여 풀면
 $x = 2000, y = 1500, z = 3000$
 따라서 D세트의 가격은 11,000 원

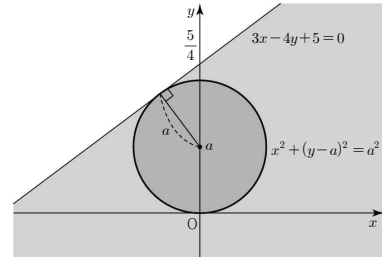
13. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 추론하기
 방정식 $f(x+1, -(y-2)) = 0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 $-1, y$ 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 그림과 같다.



(별해) 방정식 $f(x+1, -y+2) = 0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 $-1, y$ 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 도형이다.

14. [출제의도] 필요조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$



원의 중심 $(0, a)$ 와 직선 $3x - 4y + 5 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 a 이상이 되어야 하므로
 $\frac{|-4a + 5|}{\sqrt{9 + 16}} \geq a$
 $-4a + 5 > 0$ 이므로 식을 정리하면 $-4a + 5 \geq 5a$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값은 $\frac{5}{9}$

15. [출제의도] 도형의 이동을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선은 $y = -\frac{1}{2}(x-a) - 3$ 이고 이를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l 은 $x = -\frac{1}{2}(y-a) - 3$, 즉 $2x + y - a + 6 = 0$
 직선 l 이 원에 접하므로 원의 중심 $(-1, 3)$ 에서 직선 l 까지의 거리 $d = \frac{|-2 + 3 - a + 6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 따라서 $a = 2, 12$ 이므로 모든 a 값의 합은 14

16. [출제의도] 점과 직선사이의 거리를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

레이더의 위치를 원점으로 하고 동서를 x 축, 남북을 y 축으로 하면 본부는 $(-30, 20)$, A 지점은 $(-30, -40)$, B 지점은 $(50, 0)$
 물체가 지나간 경로의 직선의 방정식은 $x - 2y - 50 = 0$ 이므로
 이 물체가 본부와 가장 가까워졌을 때의 거리는
 $\frac{|-30 - 40 - 50|}{\sqrt{5}} = 24\sqrt{5}$

17. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 수학

내적 문제 해결하기

$$\begin{aligned} \{f(x+1)\}^2 &= (x-1)(x+1)(x^2+5)+9에서 \\ \{f(x)\}^2 &= x(x-2)(x^2-2x+6)+9 \\ &= (x^2-2x)(x^2-2x+6)+9 \\ &= (x^2-2x+3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) < 0 \text{ 이므로 } f(x) &= -x^2+2x-3 \\ f(x+a) &= -(x+a)^2+2(x+a)-3 \text{ 에 대하여} \\ f(x+a) &= g(x) \text{ 라 하면 } g(x) \text{ 를 } x-2 \text{ 로 나눈} \\ &\text{ 나머지가 } -6 \text{ 이 되기 위해서는} \\ g(2) &= -(2+a)^2+2(2+a)-3 = -6 \\ \text{따라서 } a^2+2a-3 &= 0 \text{ 이므로 이차방정식의 근과} \\ &\text{계수의 관계에 의해 모든 상수 } a \text{ 의 값의 곱은 } -3 \end{aligned}$$

18. [출제의도] 이차함수와 직선의 위치관계를 이용하여 추론하기

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < 0 < \beta$) 라 하면

α, β 는 이차방정식 $-\frac{x^2}{2} + k = mx$ 의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -2m, \alpha\beta = -2k$

두 점 A, B는 직선 $y = mx$ 위의 점이므로 $A(\alpha, m\alpha), B(\beta, m\beta)$

$$\overline{OA} = -\alpha \times \sqrt{1+m^2}, \overline{OB} = \beta \times \sqrt{1+m^2}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{-\alpha \times \sqrt{1+m^2}} + \frac{1}{\beta \times \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta \times \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{4m^2 + 8k}}{-2k \times \sqrt{1+m^2}}$$

실수 m 의 값에 관계없이 $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}}$ 이 갖는 일정한 값을 t 라 하자.

$$t^2 = \frac{4m^2 + 8k}{(2k \times \sqrt{1+m^2})^2} \text{ 이므로}$$

이를 정리하면 $4(1 - k^2t^2)m^2 + 4(2k - k^2t^2) = 0 \dots\dots \text{㉠}$

따라서 ㉠이 m 에 대한 항등식이므로 $k = \frac{1}{2}$ 이다.

이때 $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{1}{k}$ 이다.

$$\begin{aligned} f(m) &= \sqrt{1+m^2}, g(k) = 8k, p = \frac{1}{2} \text{ 이므로} \\ f(p) \times g(p) &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \times 4 = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

19. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 추론하기

ㄱ. $\{f(0)\}^3 = 1$ 이므로 $f(0) = 1$ (참)

ㄴ. $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하면 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$ 이므로 $n = 1$

$f(x) = ax + b$ 라 하면 좌변의 최고차항의 계수는 a^3 , 우변의 최고차항의 계수는 $4a$ 이므로 $a^3 = 4a$

$a > 0$ 이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 2 (거짓)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해 $f(x) = 2x + 1$ 이므로 $\{f(x)\}^3$ 을 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx + d$ 라 하면 $\{f(x)\}^3 = (x^2 - 1)Q(x) + cx + d$ 이므로 $\{f(1)\}^3 = c + d = 27$

$$\begin{aligned} \{f(-1)\}^3 &= -c + d = -1 \\ \text{이를 연립하여 풀면 } c &= 14, d = 13 \\ \text{따라서 } \{f(x)\}^3 \text{을 } x^2 - 1 \text{로 나눈 나머지는} \\ &14x + 13 \text{ (참)} \end{aligned}$$

20. [출제의도] 원의 방정식과 삼각형 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 C 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+4+1}{3}, y = \frac{b+3+7}{3}$$

$$a = 3x - 5, b = 3y - 10 \dots \text{㉠}$$

점 P는 원 C 위의 점이므로 $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 4 \dots \text{㉡}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

직선 AB의 방정식은 $4x + 3y - 25 = 0$ 이므로 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원의 중심 $(2, 4)$ 와 직선 AB사이의 거리는 1

구하고자 하는 거리의 최솟값은 삼각형 PAB의 무게중심이 그리는 원과 직선 AB사이의 최단거리이므로 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

21. [출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 $D(0, 0)$, 점 $B(-1, 0)$, 점 $C(1, 0)$, 점 $A(a, b)$ 라 하면 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}, \overline{AD} = \sqrt{7}$ 이므로 $(a+1)^2 + b^2 = (2\sqrt{3})^2, a^2 + b^2 = (\sqrt{7})^2$ 을 연립하여 풀면 점 A의 좌표는 $(2, \sqrt{3})$

$\overline{AC} = 2$ 이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의해 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{CE} = 1$ 이고 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{AP} = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \overline{PD} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP} : \overline{PE} = 2 : 1$ 이므로 $\overline{CP} = \frac{2}{3}, \overline{PE} = \frac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR이 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{PA} : \overline{PE} = \overline{AR} : \overline{ER} = 2\sqrt{7} : 1$

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$S_1 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2\sqrt{7}+1}$$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서 $\overline{PD} : \overline{PC} = \overline{DQ} : \overline{CQ} = \sqrt{7} : 2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로 $S_2 = S \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{\sqrt{7}+2}$

$$\frac{S_2}{S_1} = 8 - 2\sqrt{7} \text{ 이므로 } a = 8, b = -2$$

따라서 $ab = -16$

(별해) 점 D가 선분 BC의 중점이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2)$ 이 성립한다. 따라서 $\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

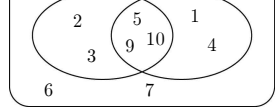
22. [출제의도] 복소수 계산하기

$$(7+2i)(7-2i) = 49 + 4 = 53$$

23. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$$2^3 + 5 \times 2^2 + 4 \times 2 + 4 = 40$$

24. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 추론하기



따라서 $n(A) = 5$ 이므로 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$

25. [출제의도] 이차함수의 성질 이해하기

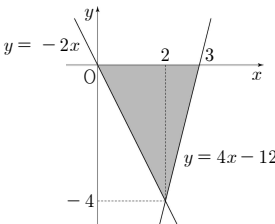
이차방정식 $x^2 + 2(a-4)x + a^2 + a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D/4 = (a-4)^2 - (a^2 + a - 1) < 0$

$$-9a + 17 < 0, a > \frac{17}{9}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2

26. [출제의도] 부등식의 영역 이해하기

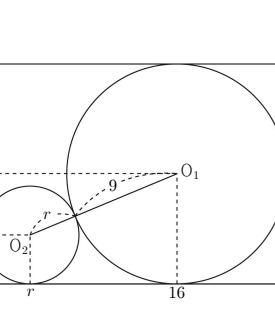
연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

27. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

처음 상자에 담은 통조림통의 밑면의 중심을 O_1 이라 하고 상자의 남은 공간에 담을 수 있는 원기둥 모양 통조림통 밑면의 중심을 O_2 라 하자. 상자의 밑면의 한 꼭짓점이 원점에 오도록 좌표평면에 두면, 그림과 같이 두 원의 중심은 각각 $O_1(16, 9), O_2(r, r)$



$$\overline{O_1O_2}^2 = (16-r)^2 + (9-r)^2 = (9+r)^2$$

$$r^2 - 68r + 256 = 0, r = 4 \text{ 또는 } r = 64$$

$r \leq 9$ 이므로 $r = 4$

따라서 부피의 최댓값은 $\pi \times 16 \times 15 = 240\pi$

28. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$y = 2x(x-a) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} \text{ 이므로}$$

점 $A\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)$, 점 $B(a, 0)$

함수 $f(x) = -(x-a)(x-a-3)$ 이고
함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 A 를 지나므로

$$-\frac{a^2}{2} = -\left(-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}-3\right)$$

$$a^2 - 6a = 0, a \text{는 양수이므로 } a = 6$$

따라서 삼각형 ACB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 18 = 27$

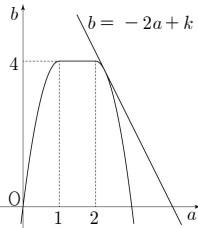
29. [출제의도] 이차함수와 직선을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = (x-2a)^2 + b$ 는 그래프의 축 $x = 2a$ 의 위치에 따라 최솟값을 갖는 x 의 좌표가 달라진다.

- (i) $a < 1$ 인 경우, 함수의 최솟값은 $x = 2$ 일 때 $(2-2a)^2 + b = 4$ 이므로 $b = -4(a-1)^2 + 4$
 - (ii) $1 \leq a < 2$ 인 경우, 함수의 최솟값은 꼭짓점의 y 좌표이므로 $b = 4$
 - (iii) $a \geq 2$ 인 경우, 함수의 최솟값은 $x = 4$ 일 때 $(4-2a)^2 + b = 4$ 이므로 $b = -4(a-2)^2 + 4$
- 그러므로

$$b = \begin{cases} -4(a-1)^2 + 4 & (a < 1) \\ 4 & (1 \leq a < 2) \\ -4(a-2)^2 + 4 & (a \geq 2) \end{cases}$$

$2a + b = k$ 라 두면



$b = -4(a-2)^2 + 4$ 와 $b = -2a + k$ 가 접할 때 k 는 최댓값을 갖는다.

따라서 $M = \frac{33}{4}$ 이고 $4M = 33$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

주어진 조건 (가)에 의해 $x_2 = -2x_1 + 6$ 이므로 점 $Q(-2x_1 + 6, y_2)$ 라 하고 이를 원 C_2 에 대입하면 $(-2x_1)^2 + (y_2 - 4 + 6\sqrt{3})^2 = 16 \dots \textcircled{1}$

점 $P(x_1, y_1)$ 가 원 C_1 위의 점이므로 대입하면 $x_1^2 + (y_1 - 4)^2 = 4 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하여 정리하면

$$(y_1 - 4)^2 = \left(\frac{y_2}{2} - 2 + 3\sqrt{3}\right)^2$$

조건 (나)에 의해

$$y_1 - 4 \leq 0, \frac{y_2}{2} - 2 + 3\sqrt{3} \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$-y_1 + 4 = \frac{y_2}{2} - 2 + 3\sqrt{3}$$

이를 정리하면 $2y_1 + y_2 = 12 - 6\sqrt{3}$

양변을 3으로 나누면 $\frac{2y_1 + y_2}{3} = 4 - 2\sqrt{3}$

그러므로 점 $(2, 4 - 2\sqrt{3})$ 은 선분 PQ 를 1:2로

내분하는 점이다.

$x_1 = 0$ 일 때,

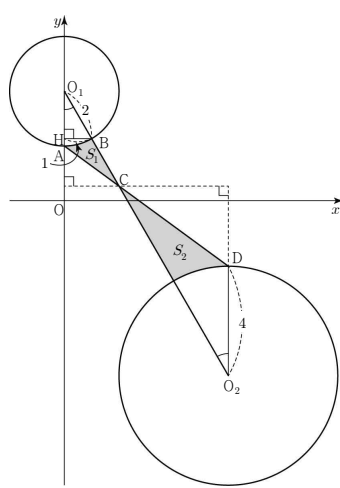
$P(0, 2), Q(6, 8 - 6\sqrt{3})$

$x_1 = 1$ 일 때,

$P(1, 4 - \sqrt{3}), Q(4, 4 - 4\sqrt{3})$ 이고

이때 직선 PQ 의 방정식은 $y = -\sqrt{3}x + 4$ 이므로 두 원 C_1, C_2 의 중심을 지난다.

$0 \leq x_1 \leq 1$ 이므로 선분 PQ 가 지나간 부분은 그림의 어두운 부분과 같다.



원 C_1 의 중심을 $O_1(0, 4)$, 원 C_2 의 중심을 $O_2(6, 4 - 6\sqrt{3})$, $A(0, 2)$, $B(1, 4 - \sqrt{3})$, $C(2, 4 - 2\sqrt{3})$, $D(6, 8 - 6\sqrt{3})$ 이라 하자. 점 B 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 O_1HB 는 직각삼각형이고 $BH = 1, O_1H = \sqrt{3}$ 그러므로 $\angle HO_1B = 30^\circ$

S_1 의 넓이는 삼각형 O_1AC 의 넓이에서 부채꼴 O_1AB 의 넓이를 뺀 값과 같다. 삼각형 O_1AC 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이고 부채꼴 O_1AB 의 넓이는 $\pi \times 2^2 \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$

즉, S_1 의 넓이는 $2 - \frac{\pi}{3}$

삼각형 O_1AC 와 삼각형 O_2DC 는 닮음이다. 닮음비가 1:2이므로 S_1 과 S_2 의 넓이의 비는 1:4

그러므로 S_2 의 넓이는 $8 - \frac{4}{3}\pi$

선분 PQ 가 그리는 도형의 넓이는 $10 - \frac{5}{3}\pi$

따라서 $a = 10, b = \frac{5}{3}$ 이므로 $a + 9b = 25$