2017학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	④	2	③	3	④	4	①	5	①
6	④	7	③	8	②	9	③	10	⑤
11	②	12	③	13	②	14	④	15	⑤
16	①	17	⑤	18	①	19	②	20	④
21	⑤	22	4	23	18	24	23	25	16
26	30	27	9	28	26	29	192	30	9

수학 영역

가형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2\times\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2\times 2^2 = 8$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cup B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cup\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$\quad = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$
따라서 $n(A\cup B) = 7$

3. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2}{n^2}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} = 4$$

4. [출제의도] 미분계수 계산하기

함수 $f(x) = x^4-3x^2+4$에서
$f'(x) = 4x^3-6x$
따라서 $f'(1) = 4-6 = -2$

5. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열 추론하기

$a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n)^2+2$이므로
$a_2 = 4,\ a_3 = 10,\ a_4 = 52$

6. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x) = 2x-1$이므로
$f'(a) = 2a-1 = 3,\ a = 2$
$f(2) = 7$이므로 $6+b = 7,\ b = 1$
따라서 $a+b = 3$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 1-}f(x) = 1,\ \lim_{x\to 2+}f(x) = 3$
따라서 $\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x) = 4$

8. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

조건 '모든 자연수 x에 대하여 $x > k-5$이다.'가 참인 명제가 되려면 $k-5 < 1,\ k < 6$이어야 하므로 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이다.
따라서 모든 k의 값의 합은 15

9. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{7n}{3n+2}\right)$이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{7n}{3n+2}\right) = 0$이다.
$\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{7}{3}$
따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+5)a_n}{n+3} = 3\times\frac{7}{3} = 7$

10. [출제의도] 무리함수의 성질 이해하기

정의역이 $\{x|x\geq -2\}$이므로
$f(x) = -\sqrt{a(x+2)}+3,\ b = 2a$
$f(1) = -\sqrt{3a}+3 = 0$
$\sqrt{3a} = 3$
$a = 3,\ b = 6$
따라서 $ab = 18$

11. [출제의도] 일대일 대응의 성질 이해하기

함수 $f(x) = 2x+b$가 일대일 대응이므로 치역과 공역이 같다.
직선 $y = f(x)$의 기울기가 양수이므로
$f(-3) = -6+b = -a$ ⋯ ㉠
$f(5) = 10+b = a$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $a = 8,\ b = -2$
따라서 $a^2+b^2 = 68$

12. [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

$2(S_6-S_4) = 3(a_6-a_4)$
$2(a_6+a_5) = 3(a_6-a_4)$
$2(r^5+r^4) = 3(r^5-r^3)$
$2r^4(r+1) = 3r^3(r+1)(r-1)$
$r > 0$이므로 $2r = 3(r-1)$
따라서 $r = 3$

13. [출제의도] 정적분과 급수의 관계 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{3-1}{n}k\right)\frac{2}{n}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^3(3x^2+2)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^3+2x\right]_1^3 = \frac{1}{2}\times(33-3) = 15$$

14. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\log a,\ \log b,\ \log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\log b = \log a+\log c$
$\log b^2 = \log ac,\ b^2 = ac$
$\log abc = \log b^3 = 15$이므로 $\log b = 5$이다.
$\log a+\log b+\log c = 15$를 만족시키고
공차가 자연수인 등차수열 $\log a,\ \log b,\ \log c$의 순서쌍 $(\log a,\ \log b,\ \log c)$는
$(4,\ 5,\ 6),\ (3,\ 5,\ 7),\ (2,\ 5,\ 8),\ (1,\ 5,\ 9)$이다.
$\log\frac{ac^2}{b} = \log\frac{ac}{b}+\log c$
$\quad = \log b+\log c = 5+\log c$
따라서 $\log c = 9$일 때,
$\log\frac{ac^2}{b}$의 최댓값은 $5+9 = 14$

15. [출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $g(x) = \int_2^x(t-2)f'(t)dt$이므로
$g'(x) = (x-2)f'(x)$
함수 $g(x)$가 $x = 0$에서만 극값을 가지므로 상수 a에 대하여 $g'(x) = (x-2)\times ax(x-2)$
$f'(x) = ax(x-2)$이고
함수 $f(x)$의 최고차항이 x^3이므로 $a = 3$
$f'(x) = 3x(x-2)$
따라서 $g(0) = \int_2^0 3t(t-2)^2dt$
$$= \left[\frac{3}{4}t^4-4t^3+6t^2\right]_2^0 = -4$$

16. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{t},\ t\right)$, 점 $\mathrm{C}(t^2,\ t)$이므로 점 $\mathrm{D}\left(t^2,\ \frac{1}{t^2}\right)$
$f(t) = \frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t}\right)(t-1)$
$g(t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t^2}\right)(t^2-1)$
$$\lim_{t\to 1+}\frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to 1+}\frac{\left(t-\frac{1}{t^2}\right)(t^2-1)}{\left(t^2-\frac{1}{t}\right)(t-1)}$$
$$= \lim_{t\to 1+}\frac{(t^3-1)(t^2-1)}{t(t^3-1)(t-1)}$$
$$= \lim_{t\to 1+}\frac{t+1}{t} = 2$$
따라서 2

17. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

ㄱ. $f(t) = t(t-1)$이므로 $t = 1$에서 점 P는 운동방향을 1번 바꾼다. (참)
ㄴ. 시각 t에서 두 점 P, Q의 가속도는 각각 $f'(t) = 2t-1,\ g'(t) = -6t+6$이다.
$p = f'(2) = 3,\ q = g'(2) = -6$이므로
$pq < 0$이다. (참)
ㄷ. $t = 0$부터 $t = 3$까지 점 Q가 움직인 거리는
$\int_0^3|g(t)|dt = \int_0^2 g(t)dt-\int_2^3 g(t)dt$
$= \int_0^2(-3t^2+6t)dt-\int_2^3(-3t^2+6t)dt$
$= 4+4 = 8$ (참)
따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. [출제의도] 등비급수의 합 추론하기

$p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n$은
첫째항이 p^n, 공비가 $\boxed{\frac{3}{p}}$인 등비수열의
첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이고, $p\neq 3$이므로
$p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n$
$= \frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{\boxed{p-3}}$이다.
$0 < \frac{p}{p+3} < 1,\ 0 < \frac{3}{p+3} < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n}{(p+3)^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{(\boxed{p-3})\times(p+3)^n}$$
$$=\frac{1}{\boxed{p-3}}\left\{p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{p+3}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{p+3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{p^2+3p+\boxed{9}}{3p}$$
이다.

$f(p)=\dfrac{3}{p}$, $g(p)=p-3$, $k=9$

따라서 $f(9)\times g(9)=2$

19. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이므로
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 모든 항의 차수는
홀수이다. 두 홀수 m, n에 대하여
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항을 각각 x^m,
x^n이라 하면, 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$의
최고차항은 각각 mx^{m-1}, nx^{n-1}이다.

$m-1=2+(n-1)$이고 $\dfrac{m}{n}=3$

그러므로 $m=3$, $n=1$

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수), $g(x)=x$라 하면

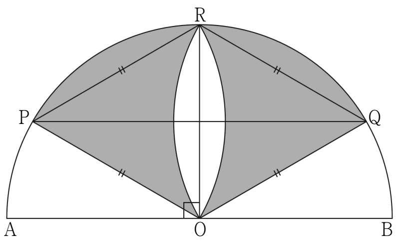
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+ax)x}{x^2}=a=-1$$

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x$

따라서 $f(2)+g(3)=6+3=9$

20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

다음은 그림 R_1이다.



호 AB 위에 $\angle\mathrm{ROA}=90^\circ$인 점을 R라 하자.
점 O를 중심으로 하는 부채꼴 POR와 점 P를
중심으로 하는 부채꼴 RPO는 합동이다.
부채꼴 POR에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형과
부채꼴 RPO에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형의
넓이가 같으므로 그림 R_1에서 색칠된 모양의
도형의 넓이는 정삼각형 RPO의 넓이의 2배와
같다.

$\angle\mathrm{ROP}=60^\circ$이므로

$S_1=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. ($n\ge 1$)

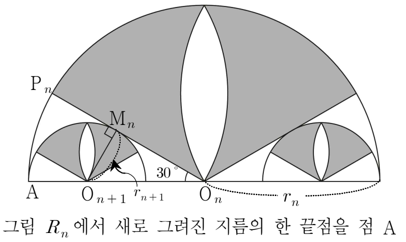


그림 R_n에서 새로 그려진 지름의 한 끝점을 점 A
로 하는 반원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n,
$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n\mathrm{A}=30^\circ$인 점을 P_n이라 하자.
(단, $\mathrm{O}=\mathrm{O}_1$, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1$)
그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 지름의 양 끝점은
선분 AO_n 위에 있고 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 접하도록
그린 가장 큰 반원의 중심을 O_{n+1}, 반지름의
길이를 r_{n+1}, 점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 내린
수선의 발을 M_n이라 하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{M}_n}}{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_n}}=\dfrac{r_{n+1}}{r_n-r_{n+1}}=\dfrac{1}{2}$, $r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$

그림 R_n에서 새로 그려진 모양의 도형 한 개의
넓이를 a_n이라 하면 $a_{n+1}=\dfrac{1}{9}a_n$이다.

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 모양의 도형의
개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 모양의
도형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{2}{9}$인
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{7}{9}}=\frac{18\sqrt{3}}{7}$

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수의 그래프 추론하기

$f(0)=0$이고 $f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)(x-3)$이므로

$f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-3)^2$

$x\le k$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 기울기가
1인 직선의 일부이다.
그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$에서의
접선의 기울기가 1이 되는 k의 값을 찾으면

$f'(k)=\dfrac{1}{3}(k-1)(k-3)=1$

$k(k-4)=0$

$k=0$ 또는 $k=4$

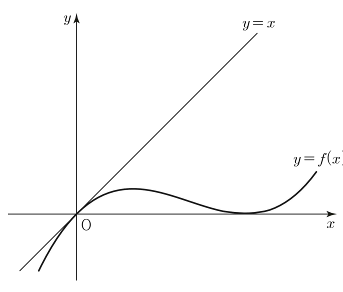
(ⅰ) $k=0$일 때

$f(0)=0$이므로 $x\le 0$에서 함수
$g(x)=x+f(0)=x$이고 $f'(0)=1$이므로
$x=0$에서 곡선 $y=f(x)$에 직선
$y=x$가 접한다.

$\dfrac{1}{9}x(x-3)^2=x$, $x(x-3)^2=9x$

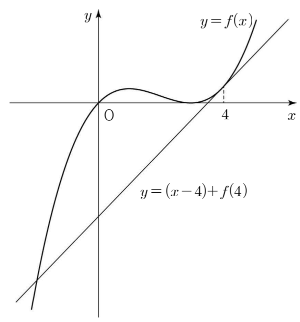
$x=0$ 또는 $x=6$ ⋯ ㉠

그러므로 $x\le 0$에서
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가
만나는 서로 다른 점의 개수는 $h(0)=1$이다.



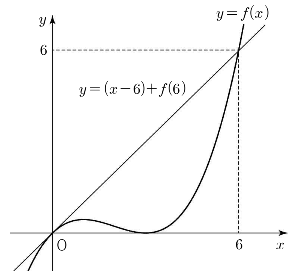
(ⅱ) $k=4$일 때

$x\le 4$에서
함수 $g(x)=(x-4)+f(4)$이고, $f'(4)=1$이
므로 $x=4$에서 곡선 $y=f(x)$에 직선
$y=(x-4)+f(4)$가 접한다. 그러므로 $x\le 4$
에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가
만나는 서로 다른 점의 개수는 $h(4)=2$이다.



(ⅲ) $k=6$일 때

㉠에서 $f(6)=6$이므로 $x\le 6$에서
함수 $g(x)=(x-6)+f(6)=x$이다.
그러므로 $x\le 6$에서 두 함수 $y=f(x)$,
$y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의
개수는 $h(6)=2$이다.



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$0<k\le 4$일 때, $h(k)=2$
$4<k<6$일 때, $h(k)=3$
$k=6$일 때, $h(k)=2$
$k>6$일 때, $h(k)=1$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}h(k)=14$

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 48-\log_2 3=\log_2 2^4=4$

23. [출제의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^2(5x^4-6x^2+1)\,dx=\left[x^5-2x^3+x\right]_0^2$$
$$=32-16+2=18$$

24. [출제의도] 역함수의 성질 이해하기

두 상수 a, b에 대하여
일차함수 $g(x)=ax+b$라 하자.
$f(14)=3$이므로 $g(3)=3a+b=14$이고
$g(2)=2a+b=11$
그러므로 $a=3$, $b=5$, $g(x)=3x+5$
따라서 $g(6)=23$

25. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기

$(X-A)\subset(A-X)$에서
$(X-A)\cap(A-X)=X-A$이고

$$\begin{aligned}(X-A)\cap(A-X)&=(X\cap A^C)\cap(A\cap X^C)\\&=(A\cap A^C)\cap(X\cap X^C)\\&=\varnothing\text{ 이므로}\end{aligned}$$

$\varnothing=X-A$, 즉 $X\subset A$

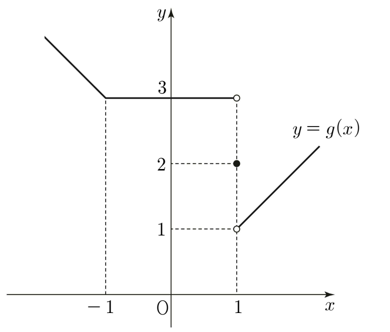
$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$이므로 $n(A)=4$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로
모든 집합 X의 개수는 $2^4=16$

26. [출제의도] 연속함수의 정의 이해하기

함수 $g(x)=\begin{cases} -x+2 & (x\le -1) \\ 3 & (|x|<1) \\ 2 & (x=1) \\ x & (x>1) \end{cases}$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.



함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x)$

$(3+a)\times 2=\lim\limits_{x\to 1+}(3x+a)x=\lim\limits_{x\to 1-}(3x+a)\times 3$

$a=-3$이므로 $f(x)=3x-3$

따라서 $f(11)=30$

27. [출제의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{2}{x}$라 하면 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나는 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{2}{a}\right)(a\ne\sqrt{2})$라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{2}{a},\ a\right)$이다.

$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$이므로 점 C는 제3사분면 위에 있고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{2}{c}\right)$라 하면 직선 BC의 기울기는 1이다.

$\dfrac{\dfrac{2}{c}-a}{c-\dfrac{2}{a}}=\dfrac{-a}{c}=1$, $c=-a$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-a,\ -\dfrac{2}{a}\right)$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\{a-(-a)\}^2+\left\{\dfrac{2}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)\right\}^2$

$\quad=4a^2+\dfrac{16}{a^2}=20$

$a^2+\dfrac{4}{a^2}=5$

따라서 $k^2=\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2=a^2+\dfrac{4}{a^2}+4=9$

28. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$이고

(가)에 의하여 $S_k>S_{k+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k는 $a_{k+1}<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수이다.

그러므로 $n\le k$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge 0$이고 $d<0$이다.

(나)의 $a_8=-\dfrac{5}{4}a_5$에 의하여 $a_5>0$, $a_8<0$이고, $a_5a_6a_7<0$에 의하여 $a_6>0$, $a_7<0$이다.

그러므로 $k=6$

$S_6=\dfrac{6(2a+5d)}{2}=102$이므로 $2a+5d=34$이고

$a+7d=-\dfrac{5}{4}(a+4d)$이므로 $3a+16d=0$이다.

$a=32$, $d=-6$

따라서 $a_2=a+d=32+(-6)=26$

29. [출제의도] 수열의 규칙성 추론하기

(i) 자연수 n에 대하여

$(-1,0)\in A_n\cap B_n$, $(1,0)\in A_n\cap B_n$이다.

(ii) $x=0$일 때,

$(0+n)^2+y^2\le(n+1)^2$, $y^2\le 2n+1$

$-\sqrt{2n+1}\le y\le\sqrt{2n+1}$이므로

$(x+n)^2+y^2\le(n+1)^2$과

$(x-n)^2+y^2\le(n+1)^2$을 모두 만족시키는 정수 x, y의 순서쌍 (x,y)의 개수는

$-\sqrt{2n+1}\le y\le\sqrt{2n+1}$을 만족시키는 모든 정수 y의 개수와 같다.

$n=1$일 때, y의 개수는 3

$n=2$, 3일 때, y의 개수는 5

$n=4$, 5, 6, 7일 때, y의 개수는 7

$n=8$, 9, 10, 11일 때, y의 개수는 9

$n=12$, 13, 14, 15, 16, 17일 때, y의 개수는 11

$n=18$일 때, y의 개수는 13

(i), (ii)에 의하여

$a_1=3+2=5$

$a_2=a_3=5+2=7$

$a_4=a_5=a_6=a_7=7+2=9$

$a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=9+2=11$

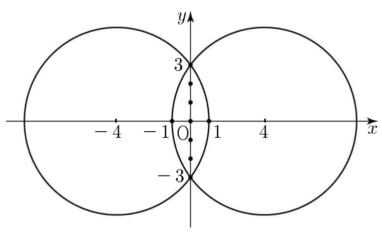
$a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{15}=a_{16}=a_{17}=11+2=13$

$a_{18}=13+2=15$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{18}a_n=192$

(참고) $n=4$인 경우

$A_4\cap B_4=\{(-1,0),(1,0),(0,-3),(0,-2),$
$(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)\}$



따라서 $a_4=9$

30. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

(i) $f(x)<k$일 때,

함수 $g(x)=\dfrac{k}{2}$

(ii) $f(x)\ge k$일 때,

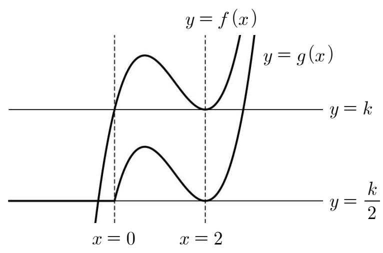
함수 $g(x)=f(x)-\dfrac{k}{2}$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-\dfrac{k}{2}$만큼 평행이동시킨 그래프이다.

(가), (나)에 의하여

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와

두 직선 $y=k$, $y=\dfrac{k}{2}$의 개형은 다음과 같다.



$\displaystyle\int_0^2|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^2\frac{k}{2}dx=8$

이므로 $k=8$

그러므로 세 상수 a, b, c에 대하여

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이다.

$f(0)=8$, $f(2)=8$, $f'(2)=0$이므로

$c=8$, $4a+2b+c=0$, $12+4a+b=0$이고

$a=-4$, $b=4$

함수 $f(x)=x^3-4x^2+4x+8$이므로

함수 $g(x)=\begin{cases} 4 & (x<0) \\ x^3-4x^2+4x+4 & (x\ge 0) \end{cases}$

따라서 $g(1)+g(-1)=5+4=9$