2017학년도 9월 고2 전국연합학력평가

정답 및 해설

수학 영역

나형 정답

1	②	2	③	3	④	4	⑤	5	⑤
6	④	7	①	8	②	9	④	10	①
11	②	12	③	13	②	14	⑤	15	③
16	⑤	17	②	18	①	19	④	20	①
21	③	22	25	23	500	24	6	25	20
26	3	27	51	28	18	29	32	30	60

수학 영역

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기
$27\times 3^{-2}=3^3\times 3^{-2}=3^{3+(-2)}=3$

2. [출제의도] 집합의 연산 계산하기
$A\cap B=\{3,5,7\}$ 이므로
$n(A\cap B)=3$

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n}}=4$$

4. [출제의도] 로그 계산하기
$\log_3 9+\log_3\sqrt{3}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

5. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기
$$\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\{(k+1)^2-(k^2+k)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(k+1)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$$
$$=\frac{5\times 6}{2}+5=20$$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=1+3=4$

7. [출제의도] 절대부등식 이해하기
$a>0$ 이므로 $4a>0$, $\frac{1}{a}>0$
$$4a+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{4a\times\frac{1}{a}}=4$$
(단, 등호는 $a=\frac{1}{2}$ 일 때 성립한다.)
$$4a+\frac{1}{a}+1\ge 4+1=5$$
따라서 $4a+\frac{1}{a}+1$ 의 최솟값은 5

8. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기
$$y=-\sqrt{2x+a}+3=-\sqrt{2\left(x+\frac{a}{2}\right)}+3$$
이므로 함수 $y=-\sqrt{2x+a}+3$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프이다. 주어진 그림에 의하여
$-\frac{a}{2}=2$, $b=3$
따라서 $a+b=(-4)+3=-1$

9. [출제의도] 등비수열 이해하기
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$
$a_7=2\sqrt{2}\,a_4$ 이므로 $ar^6=2\sqrt{2}\,ar^3\ (a>0)$
$r^3=2\sqrt{2}$, 즉 $r=\sqrt{2}$
$a_2=\sqrt{2}\,a=2\sqrt{2}$ 이므로 $a=2$
따라서 $a_8=16\sqrt{2}$

10. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기
$a_1=\frac{2}{5}$, $a_2=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$, $a_3=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$
$a_4=-\frac{8}{5}+2=\frac{2}{5}$, $a_5=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$, $\cdots$
$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ 에 대하여
$a_{3k+1}=\frac{2}{5}$, $a_{3k+2}=\frac{4}{5}$, $a_{3(k+1)}=\frac{8}{5}$
따라서
$$a_4+a_{17}=a_{3\times1+1}+a_{3\times5+2}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

11. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
$a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 이므로
$$\sum_{n=1}^{99}a_n=\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{100}{99}$$
$$=\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)=\log 100=2$$

12. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기
$(X-A)\subset(A-X)$ 에서
$(X-A)\cap(A-X)=X-A$ 이고
$$(X-A)\cap(A-X)=(X\cap A^C)\cap(A\cap X^C)$$
$$=(A\cap A^C)\cap(X\cap X^C)$$
$=\varnothing$ 이므로
$\varnothing=X-A$, 즉 $X\subset A$
$A=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ 이므로 $n(A)=4$
따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합이므로 모든 집합 X의 개수는 $2^4=16$

13. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$\log_2(a^2+ab+b^2)=1+\log_2(a^2-ab+b^2)$
$\log_2(a^2+ab+b^2)=\log_2 2(a^2-ab+b^2)$
$a^2+ab+b^2=2(a^2-ab+b^2)$
$a^2-3ab+b^2=0$
$a^2+b^2=3ab$
따라서 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}=3$

14. [출제의도] 극한으로 표현된 함수의 연속성 이해하기
(i) $0<x<1$ 인 경우
$\lim_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+1}-2a-1}{2x^n+3}=\frac{-2a-1}{3}$$
(ii) $x=1$ 인 경우
$$f(1)=\frac{a-2a-1}{2+3}=\frac{-a-1}{5}$$
(iii) $x>1$ 인 경우
$\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+1}-2a-1}{2x^n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{ax-\frac{2a+1}{x^n}}{2+\frac{3}{x^n}}=\frac{a}{2}x$$
$x=1$ 에서 연속이므로
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$
$$\frac{a}{2}=\frac{-2a-1}{3}=\frac{-a-1}{5}$$
따라서 $a=-\frac{2}{7}$

15. [출제의도] 지수법칙 이해하기
$2^a=3^b=k\ (k>1)$ 이라 놓으면
$2=k^{\frac{1}{a}}$, $3=k^{\frac{1}{b}}$
$(a-2)(b-2)=4$ 에서 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}$
$k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{a+b}{ab}}=k^{\frac{1}{2}}=6$
따라서 $4^a\times 3^{-b}=\frac{(2^a)^2}{3^b}=\frac{k^2}{k}=k=36$

(별해)
$2^a=3^b=k\ (k>1)$ 이라 놓으면
$a=\log_2 k$, $b=\log_3 k$
$(a-2)(b-2)=(\log_2 k-2)(\log_3 k-2)$
$=\log_2 k\times\log_3 k-2\log_2 k-2\log_3 k+4=4$
$\log_2 k\times\log_3 k-2(\log_2 k+\log_3 k)=0$
$$\frac{\log_2 k+\log_3 k}{\log_2 k\times\log_3 k}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{\log_2 k}+\frac{1}{\log_3 k}=\frac{1}{2}$$
$\log_k 2+\log_k 3=\log_k 6=\frac{1}{2}$, 즉 $k^{\frac{1}{2}}=6$
따라서 $4^a\times 3^{-b}=\frac{(2^a)^2}{3^b}=\frac{k^2}{k}=k=36$

16. [출제의도] 함수의 극한 성질을 이용하여 수

학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. … ①

조건 (나)에 의하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = -1$에서

극한값이 존재하고 $x \to 0$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$

즉 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ … ②

①, ②에 의하여 $f(x) = 2x^2 + ax$라 하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2x+a)}{x(x+1)} = a = -1$$

즉 $f(x) = 2x^2 - x$

따라서 $f(3) = 15$

17. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\sqrt{x+1}$이 직선 $x=t\,(0<t<1)$과 만나는 점은 각각

$\mathrm{P}\left(t,\ \sqrt{1-t^2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(t,\ \sqrt{t+1}\right)$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{t\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{1-t^2}\right)}{2}$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S(t)}{t^2} = \lim_{t \to 0+} \frac{t\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{1-t^2}\right)}{2t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{t^2+t}{2t\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{t+1}{2\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{1-t^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

18. [출제의도] 등비급수의 합 추론하기

$p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n$은

첫째항이 p^n, 공비가 $\boxed{\frac{3}{p}}$인 등비수열의

첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이고, $p \neq 3$이므로

$p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n$

$= \dfrac{p^{n+1}-3^{n+1}}{\boxed{p-3}}$ 이다.

$0 < \dfrac{p}{p+3} < 1$, $0 < \dfrac{3}{p+3} < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n + 3p^{n-1} + 3^2p^{n-2} + \cdots + 3^{n-1}p + 3^n}{(p+3)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{(\boxed{p-3}) \times (p+3)^n}$$

$$= \frac{1}{\boxed{p-3}} \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p+3}\right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{p+3}\right)^n \right\}$$

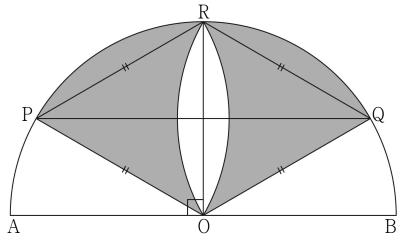
$= \dfrac{p^2+3p+\boxed{9}}{3p}$ 이다.

$f(p) = \dfrac{3}{p}$, $g(p) = p-3$, $k=9$

따라서 $f(9) \times g(9) = 2$

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

다음은 그림 R_1이다.



호 AB 위에 $\angle \mathrm{ROA} = 90^\circ$인 점을 R라 하자. 점 O를 중심으로 하는 부채꼴 POR와 점 P를 중심으로 하는 부채꼴 RPO는 합동이다.

부채꼴 POR에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형과 부채꼴 RPO에서 정삼각형 RPO를 제외한 도형의 넓이가 같으므로 그림 R_1에서 색칠된 모양의 도형의 넓이는 정삼각형 RPO의 넓이의 2배와 같다.

$\angle \mathrm{ROP} = 60^\circ$이므로

$S_1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다. $(n \geq 1)$

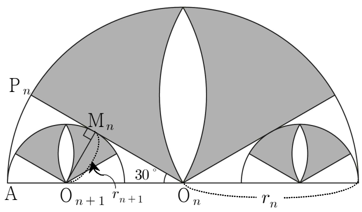


그림 R_n에서 새로 그려진 지름의 한 끝점을 점 A로 하는 반원의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n, $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{O}_n\mathrm{A} = 30^\circ$인 점을 P_n이라 하자.

(단, $\mathrm{O} = \mathrm{O}_1$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$)

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 지름의 양 끝점은 선분 AO_n 위에 있고 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 접하도록 그린 가장 큰 반원의 중심을 O_{n+1}, 반지름의 길이를 r_{n+1}, 점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 M_n이라 하면

$$\frac{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{M}_n}}{\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{O}_n}} = \frac{r_{n+1}}{r_n - r_{n+1}} = \frac{1}{2},\ r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$$

그림 R_n에서 새로 그려진 모양의 도형 한 개의 넓이를 a_n이라 하면 $a_{n+1} = \frac{1}{9} a_n$이다.

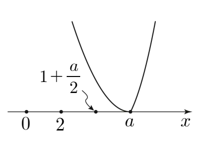
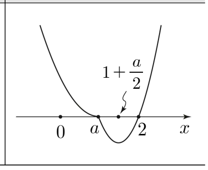
그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 모양의 도형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 모양의 도형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{2}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{1-\frac{2}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{18\sqrt{3}}{7}$

20. [출제의도] 사이값 정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a > 2$인 경우	(ii) $0 < a < 2$인 경우
	

(i) $a > 2$인 경우

함수 $f(x)$는 $0 < x < 1 + \frac{a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 2$인 경우

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ 1+\frac{a}{2}\right]$에서 연속이고, $f(0) > 0$, $f\left(1+\frac{a}{2}\right) < 0$이므로 사이값 정리에 의하여 0과 $1+\frac{a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의해 $0 < a < 2$인 경우의 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2} \times (2-a) \times \left\{-f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right\}$

$= -\frac{1}{2} \times (2-a) \times \left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{2-a}{2}\right)$

$= \frac{1}{8}(2-a)^3 = \frac{1}{8}$

$(2-a)^3 = 1$, 즉 $a = 1$

따라서 $f(3a) = f(3) = 2$

21. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

ㄱ. $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ {x_2}^2)$이고

직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$의 기울기가 a_1이므로

$a_1 = \dfrac{{x_2}^2 - 0}{x_2 - 0} = x_2 = 3$ (참)

ㄴ. 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기 a_n은

$a_n = \dfrac{{x_{n+1}}^2 - {x_n}^2}{x_{n+1} - x_n} = x_{n+1} + x_n$

조건 (나)에 의하여

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고,

공차가 $d\,(d > 3)$인 등차수열이므로

$a_n = x_{n+1} + x_n = 3 + (n-1)d$ … ①

①에서 $n = 1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면

$x_2 = 3$, $x_3 = d$, $x_4 = 3 + d$, $x_5 = 2d$, …

$x_{2n} = 3 + (n-1)d$, $x_{2n-1} = (n-1)d$이므로

$x_{20} = 3 + 9d$, $x_{19} = 9d$

$x_{20} = x_{19} + 3$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} (x_{2k+1} - x_{2k})$

$= (x_3 - x_2) + (x_5 - x_4) + \cdots + (x_{21} - x_{20})$

$= (d-3) + (d-3) + \cdots + (d-3)$

$= 10(d-3) \leq 100$

$d \leq 13$이므로 d의 최댓값은 13 (참)

따라서 <보기>에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

22. [출제의도] 명제가 참일 때 조건 이해하기

명제 '$x=5$이면 $x^2=a$이다.'가 참이 되기 위해서는 $5^2 = 25$이므로 a의 값은 25

23. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a\left(\frac{1}{2}x + b\right) - 6$

$= \frac{1}{2}ax + ab - 6 = x$

항등식의 성질에 의하여

$\frac{1}{2}a=1$, $ab-6=0$

즉 $a=2$, $b=3$

따라서 $100(a+b)=500$

24. [출제의도] 급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{12n+3}a_n-1\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{12n+3}a_n-1\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{12n+3}a_n=1$

수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\frac{2n}{12n+3}a_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=1$, $a_n=\frac{12n+3}{2n}b_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{12n+3}{2n}b_n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n+3}{2n}\times\lim_{n\to\infty}b_n=6$

25. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

(i) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$ 이므로

$10a-12=8+2a+b$

즉 $8a-b=20$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(2)$가 존재한다.

$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0-}\frac{\{2(2+h)^2+a(2+h)+b\}-(10a-12)}{h}$

$=8+a$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\{5a(2+h)-12\}-(10a-12)}{h}$

$=5a$

$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

이므로 $8+a=5a$, 즉 $a=2$, $b=-4$

따라서 $a^2+b^2=20$

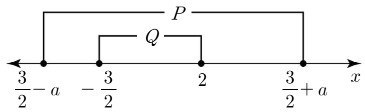
26. [출제의도] 필요조건을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\left\{x \,\middle|\, \frac{3}{2}-a\le x\le\frac{3}{2}+a\right\}$,

$Q=\left\{x \,\middle|\, -\frac{3}{2}\le x\le 2\right\}$이고 p는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset P$

두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 그림과 같다.



$\frac{3}{2}-a\le-\frac{3}{2}$, $2\le\frac{3}{2}+a$ 이므로

$a\ge3$, $a\ge\frac{1}{2}$, 즉 $a\ge3$

따라서 a의 최솟값은 3

27. [출제의도] 거듭제곱근 추론하기

(i) $n=2$일 때

$(7-4)^3$의 제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 2 이므로 $f(2)=2$

(ii) $n=3$일 때

$(7-6)^3$의 세제곱근 중에서 실수인 것의 개수는 1 이므로 $f(3)=1$

(iii) $n\ge4$일 때

$(7-2n)^3<0$ 이므로

$n=4, 6, 8, \cdots, 100$일 때, $f(n)=0$

$n=5, 7, 9, \cdots, 99$일 때, $f(n)=1$

따라서 $\sum_{n=2}^{100}f(n)=51$

28. [출제의도] 유리함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점 $P(a, a)$이다.

$f(a)=\frac{2a}{6a-9}=a$, 즉 $a=\frac{11}{6}$

$P\left(\frac{11}{6}, \frac{11}{6}\right)$

$\overline{CQ}=\overline{DQ}$ 이므로 점 Q는 직선 $y=-x$ 위의 점 $Q(b, -b)$이다.

$f(b)=\frac{2b}{6b-9}=-b$, 즉 $b=\frac{7}{6}$

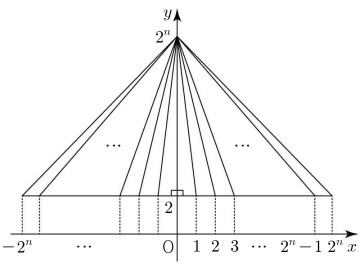
$Q\left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}\right)$

$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{OA}:\overline{OC}=11:7$ 이므로

$m=11$, $n=7$

따라서 $m+n=18$

29. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



조건 (가)에 의하여 $b=2$, $a\ne0$

조건 (나)에 의하여

a는 $-2^n\le a\le-1$, $1\le a\le2^n$인 정수

(i) $1\le a\le2^n$인 경우

모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은

$\frac{1}{2}\times(2^n-2)\times\{1+2+3+\cdots+(2^n-1)+2^n\}$

$=\frac{1}{2}\times(2^n-2)\times\frac{2^n(1+2^n)}{2}$

$=\frac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})$

(ii) $-2^n\le a\le-1$인 경우

모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은 (i)과 같다.

(i), (ii)에 의하여

$S_n=2\times\frac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})$

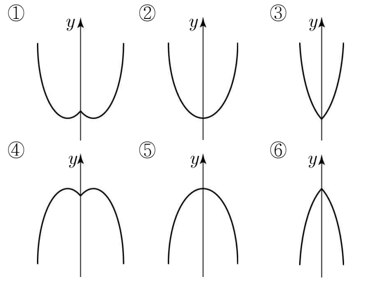
$=\frac{1}{2}(8^n-4^n-2^{n+1})$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{8^{n-2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-4^n-2^{n+1}}{8^{n-2}}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}-\frac{2}{4^n}}{\frac{1}{64}}=32$

30. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge0$인 부분에서의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 그래프이므로 다음과 같은 6가지 경우의 그래프의 개형을 갖는다.

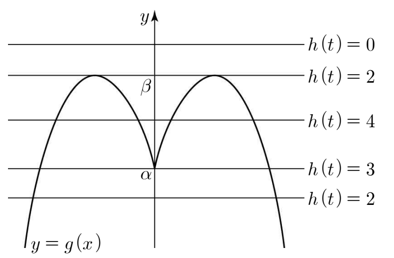


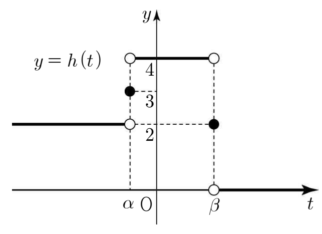
함수 $h(t)$가 조건 (가)의 $h(2)<h(-1)<h(0)$을 만족시키는 경우는 다음의 4가지이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 ④의 경우가 유일하다.

$h(t)=3$을 만족시키는 t를 α, $h(t)=2$를 만족시키는 t를 $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





(단, $-1\le\alpha\le0$, $0<\beta\le2$)

조건 (나)에서 함수 $(t^2-t)h(t)$가 모든 실수 t에서 연속이려면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서 연속이어야 한다.

$t=\alpha$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t\to\alpha+}(t^2-t)h(t)=\lim_{t\to\alpha-}(t^2-t)h(t)$

$= (\alpha^2 - \alpha)h(\alpha)$

에서 $\alpha^2 - \alpha = 0$, 즉 $\alpha = 0,\ 1$

또, $t = \beta$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t \to \beta+} (t^2 - t)h(t) = \lim_{t \to \beta-} (t^2 - t)h(t)$

$= (\beta^2 - \beta)h(\beta)$

에서 $\beta^2 - \beta = 0$, 즉 $\beta = 0,\ 1$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$이므로 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t > 1) \\ 2 & (t = 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 0) \\ 2 & (t < 0) \end{cases}$$

이를 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 원점을 지나고 제1사분면에서 최댓값이 1인 위로 볼록한 함수이다.

즉 $f(x) = a(x-b)^2 + 1 \ \ (a < 0,\ b > 0)$

$f(0) = 0$ 이므로 $ab^2 = -1$

$a = -\dfrac{1}{b^2}$ 이고 a는 정수이므로 $b^2 = 1$

즉 $b = 1$ 이므로 $a = -1$

$f(x) = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$

따라서 $80f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 80 \times \dfrac{3}{4} = 60$