제 2 교시

수학 영역 (나형)

5 지 선 다 형

1. 27×3^{-2}의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 9 ④ 27 ⑤ 81

2. 두 집합

$$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\},\ B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$$

에 대하여 $n(A\cap B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+1}{2n^2+3n}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

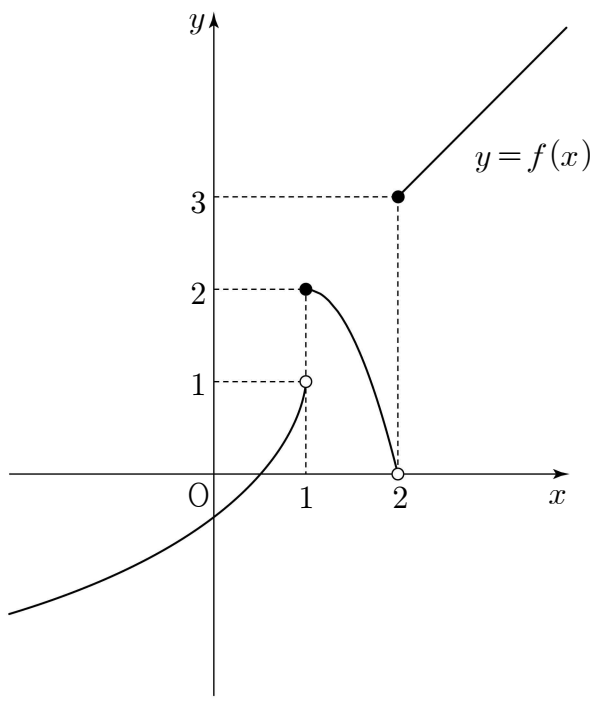
4. $\log_3 9+\log_3\sqrt{3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

5. $\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



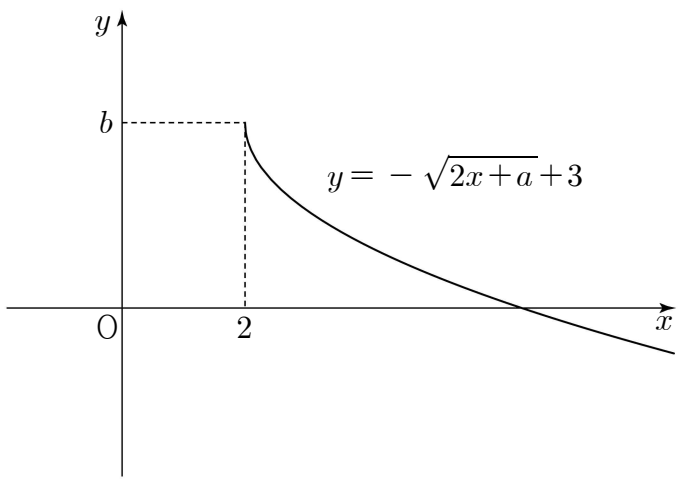
$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 양수 a 에 대하여 $4a+\frac{1}{a}+1$ 의 최솟값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

8. 그림과 같이 집합 $\{x|x \geq 2\}$ 에서 정의된 무리함수 $y=-\sqrt{2x+a}+3$ 의 그래프가 점 $(2,\ b)$ 를 지날 때, 두 상수 $a,\ b$ 에 대하여 $a+b$ 의 값은? [3점]



① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=2\sqrt{2}\ ,\quad a_4:a_7=1:2\sqrt{2}$$

일 때, a_8 의 값은? [3점]

① 8 ② $8\sqrt{2}$ ③ 16 ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ 32

10. 첫째항이 $\frac{2}{5}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n \leq 1) \\ -a_n+2 & (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킨다. a_4+a_{17} 의 값은? [3점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ 2 ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

11. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$이다. $\sum_{n=1}^{99}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{x \mid x$는 10의 약수$\}$에 대하여

$$(X-A)\subset(A-X)$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

13. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_2(a^2+ab+b^2) = 1+\log_2(a^2-ab+b^2)$$

일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

14. 집합 $\{x|x>0\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+1}-2a-1}{2x^n+3}$$

이 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{6}{7}$ ② $-\frac{5}{7}$ ③ $-\frac{4}{7}$ ④ $-\frac{3}{7}$ ⑤ $-\frac{2}{7}$

15. 두 양수 a, b에 대하여

$$2^a = 3^b, \quad (a-2)(b-2) = 4$$

일 때, $4^a \times 3^{-b}$의 값은? [4점]

① 12 ② 18 ③ 36 ④ 54 ⑤ 72

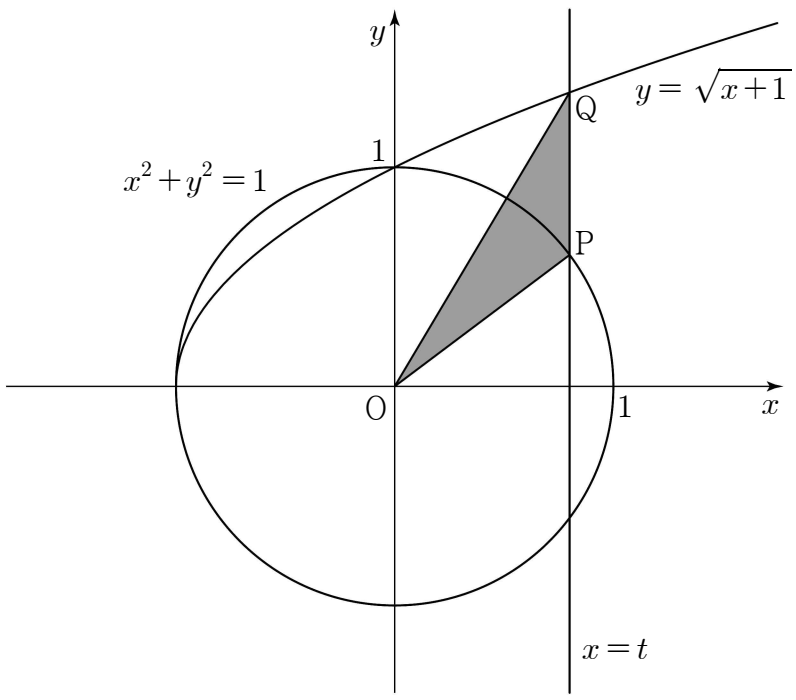
16. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^2}{3x^2+2x+5} = \frac{1}{3}$

(나) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2+x} = -1$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

17. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 과 곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 이 직선 $x=t\ (0<t<1)$ 과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\dfrac{S(t)}{t^2}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

18. 다음은 3 이 아닌 양수 p 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n}{(p+3)^n}=\frac{p^2+3p+\boxed{\text{(다)}}}{3p}$$

가 성립함을 보이는 과정이다.

$p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n$ 은
첫째항이 p^n, 공비가 $\boxed{\text{(가)}}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제$(n+1)$ 항까지의 합이고, $p\neq 3$ 이므로

$$p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n$$
$$=\frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{\boxed{\text{(나)}}}$$

이다.

$0<\dfrac{p}{p+3}<1$, $0<\dfrac{3}{p+3}<1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n+3p^{n-1}+3^2p^{n-2}+\cdots+3^{n-1}p+3^n}{(p+3)^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n+1}-3^{n+1}}{(\boxed{\text{(나)}})\times(p+3)^n}$$
$$=\frac{1}{\boxed{\text{(나)}}}\left\{p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{p+3}\right)^n-3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{p+3}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{p^2+3p+\boxed{\text{(다)}}}{3p}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(p)$, $g(p)$ 라 하고, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k)\times g(k)$ 의 값은? [4점]

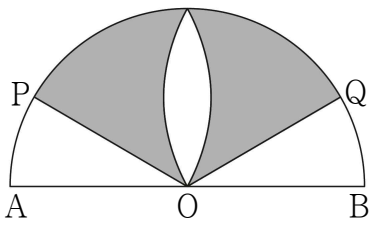
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA = \angle BOQ = 30^\circ$가 되도록 잡는다.

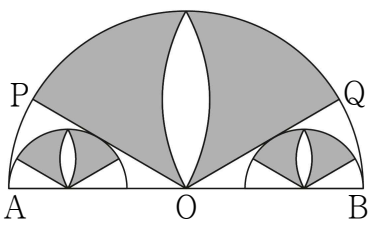
부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

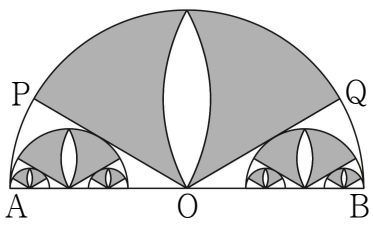
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

…

…

① $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{17\sqrt{3}}{7}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{19\sqrt{3}}{7}$

20. 2가 아닌 양수 a에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & (x \le a) \\ (x-2)(x-a) & (x > a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3a)$의 값은? [4점]

(가) $f(c) = 0$인 c가 0과 $1+\frac{a}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) 세 점 $(2,\ f(2))$, $(a,\ f(a))$, $\left(1+\frac{a}{2},\ f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{8}$이다.

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

21. 곡선 $y=x^2$ 위의 점을 $\mathrm{P}_n(x_n,\ x_n^{\,2})$이라 하자. 점 $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$이고, 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기를 a_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다. (단, n은 자연수이다.)

(가) $a_1=3$
(나) $d>3$인 상수 d에 대하여
$a_{n+1}=a_n+d$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2=3$
ㄴ. $x_{20}=x_{19}+d$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}\left(x_{2k+1}-x_{2k}\right)\le 100$을 만족시키는 d의 최댓값은 13이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단 답 형

22. 명제

'$x=5$이면 $x^2=a$이다.'

가 참이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 함수

$$f(x)=ax-6,\quad g(x)=\frac{1}{2}x+b$$

가 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시킬 때, $100(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{12n+3}a_n-1\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+b & (x<2)\\ 5ax-12 & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]

26. 실수 x에 대한 두 조건

$$p : \left|x-\frac{3}{2}\right|\leq a \ ,$$

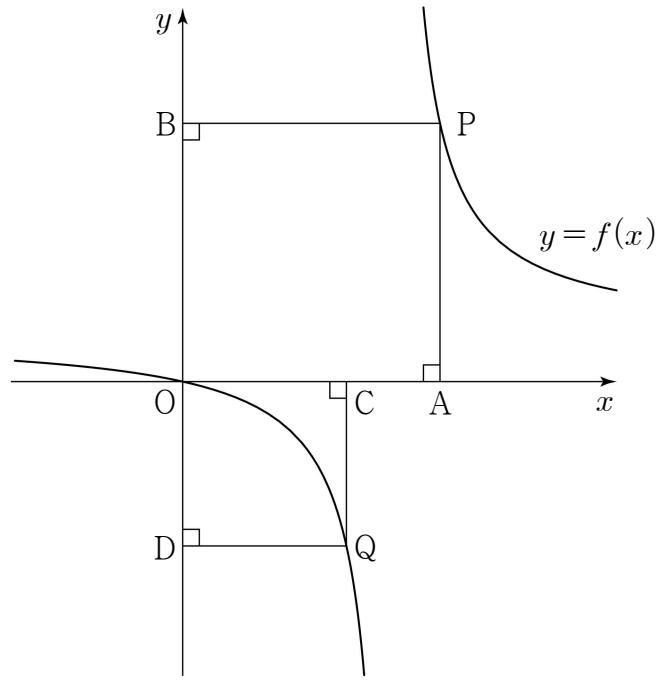
$$q : 2x^2-x-6\leq 0$$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

27. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $(7-2n)^3$의 n 제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{100} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{2x}{6x-9}$의 그래프 위의 점 중에서 제1사분면에 있는 점을 P, 제4사분면에 있는 점을 Q라 할 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하고, 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.

두 사각형 OAPB, ODQC가 정사각형일 때, $\overline{OP} : \overline{OQ} = m : n$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 2 이상의 자연수 n과 두 정수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$, $\mathrm{C}(0,\ 2^n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형이다.
(나) $\lvert ab\rvert \le 2^{n+1}$

위의 조건을 만족시키는 모든 삼각형 ABC의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{8^{n-2}}$의 값을 구하시오. [4점]

30. 세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
(나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.