

2017학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	④	2	③	3	③	4	①	5	⑤
6	③	7	⑤	8	①	9	①	10	②
11	②	12	②	13	④	14	①	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	⑤	20	③
21	④	22	8	23	75	24	7	25	10
26	18	27	9	28	27	29	40	30	80

해설

1. [출제의도] 로그를 포함한 부등식을 계산한다.

x 는 진수이므로 $x > 0$
 $\log_2 x \leq 2$ 에서 $\log_2 x \leq \log_2 4$
 밑이 1보다 크므로 $x \leq 4$
 $0 < x \leq 4$ 이므로 정수 x 의 개수는 4

2. [출제의도] 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 계산한다.

원점 O 와 평면 $x+y+z+3=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$

3. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산한다.

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 $P(A \cap B) = 0$
 따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{3}{10} + \frac{2}{5} - 0 = \frac{7}{10}$

4. [출제의도] 정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= (e - 0) - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

5. [출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산한다.

$E(\bar{X}) = E(X)$, $E(\bar{X}) = \frac{5}{6}$ 이고 $E(X) = a + 2b$ 이므로
 $a + 2b = \frac{5}{6}$

6. [출제의도] 구의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 C 는 구 위의 한 점이므로 삼각형 ABC 는 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.
 따라서 삼각형 ABC 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2}$
 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{30}$
 $= 3\sqrt{5}$

7. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주기를 구한다.

$$f(x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos(2x + x)$$

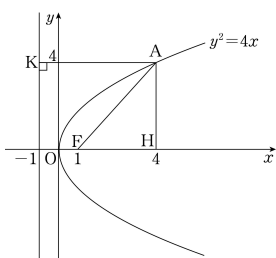
$$= \cos 3x$$

$$f(x) = \cos 3x = \cos(3x + 2\pi)$$

$$= \cos 3\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) = f\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$

8. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.



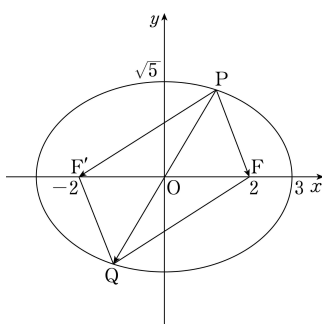
포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점은 $F(1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -1$
 점 A 에서 준선에 내린 수선의 발을 K 라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AK} = \overline{AF} = 5$ 이므로 $\overline{FH} = 3$
 직각삼각형 AFH 에서
 $\overline{AH} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{FH}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
 따라서 삼각형 AFH 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

9. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

전체 경우의 수는 여섯 명을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $6!$
 $(A, a), (B, b), (C, c)$ 와 같이 각 부부를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 방법의 수는 $3!$
 각 묶음 내에서 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3! \times 2 \times 2 \times 2}{6!} = \frac{1}{15}$

10. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 장축의 길이는 6



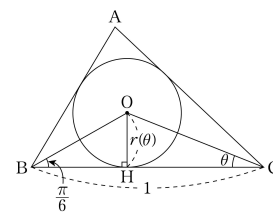
$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PQ}$ 라 할 때, 점 Q 는 타원 위의 점이다.
 따라서 $|\overline{PQ}|$ 의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.
 따라서 $|\overline{PF} + \overline{PF'}|$ 의 최댓값은 $2 \times 3 = 6$

11. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 산책로를 따라 이동할 확률을 구한다.

사건 X 가 일어날 확률 $P(X)$ 는
 (i) ㉠을 지나는 경우
 표에 의하여 확률은 $\frac{1}{3}$
 (ii) ㉡을 지나는 경우
 ㉡을 지나기 위해서는 ㉠을 지나야 하므로
 표에 의하여 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
 (iii) ㉢을 지나는 경우
 (ii)와 같은 방법으로 $\frac{1}{6}$
 (i), (ii), (iii)에 의해서
 $P(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
 두 사건 X, Y 가 동시에 일어날 확률 $P(X \cap Y)$ 는
 $P(X \cap Y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

따라서 $P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{1}{2}$

12. [출제의도] 몫의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.



삼각형 ABC 에 내접하는 원의 중심을 O 라 하고, 점 O 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
 점 O 는 삼각형 ABC 의 내심이므로

$$\angle OBH = \frac{\pi}{6}, \angle OCH = \theta$$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{BH}} = \tan \frac{\pi}{6} \text{에서 } \frac{r(\theta)}{\overline{BH}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{이므로 } \overline{BH} = \sqrt{3}r(\theta)$$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{CH}} = \tan \theta \text{에서 } \frac{r(\theta)}{\overline{CH}} = \tan \theta \text{이므로 } \overline{CH} = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$

$$\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3}r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 1, r(\theta) = \frac{\tan \theta}{1 + \sqrt{3} \tan \theta}$$

$$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta} \text{이므로 } h(\theta) = \frac{1}{1 + \sqrt{3} \tan \theta}$$

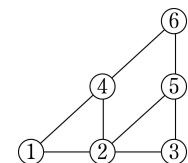
$$h(\theta) \text{를 } \theta \text{에 대하여 미분하면}$$

$$h'(\theta) = -\frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(1 + \sqrt{3} \tan \theta)^2}$$

따라서 $h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

그림과 같이 6개의 점에 ①부터 ⑥까지의 번호를 부여하자.



②번 점은 다른 4개의 점과 다리로 연결되어 있으므로 ②번 점에 세우는 깃발의 색부터 먼저 고려한다.
 ②번 점에 깃발을 세우는 경우의 수는 3
 ②번 점에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 항상 ⑥번 점에 세워야 한다.
 남은 두 색의 깃발 중 한 가지 색을 선택하여 ①번 점에 깃발을 세우는 경우의 수는 2
 ①번 점에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 ③번 또는 ⑤번 점에 세워야 한다.
 그러므로 두 점 중 한 점을 선택하는 경우의 수는 2
 나머지 두 점에는 남은 깃발을 세운다.
 따라서 점에 깃발을 세우는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$

14. [출제의도] 함수와 그 함수의 역함수의 미분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$f(g(x)) = x, g(f(x)) = x \text{이므로}$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1, g'(f(x))f'(x) = 1$$

따라서

$$\int_1^3 \left\{ \frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))} \right\} dx$$

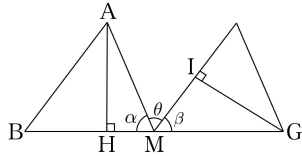
$$= \int_1^3 \{f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\} dx$$

$$= \int_1^3 \{f(x)g(x)\}' dx$$

$$= \left[f(x)g(x) \right]_1^3$$

$= f(3)g(3) - f(1)g(1)$
 $f(1)=3$ 에서 $g(3)=1$, $g(1)=3$ 에서 $f(3)=1$
 따라서 $f(3)g(3) - f(1)g(1) = 1 \times 1 - 3 \times 3 = -8$

15. [출제의도] 두 평면의 위치 관계를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.



평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 이면각을 α , 평면 EDCF와 평면 GDC가 이루는 이면각을 β 라 하자. 모서리 CD의 중점을 M, 점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H, 점 G에서 사각형 EDCF에 내린 수선의 발을 I라 하면,

$$\overline{AM} = \sqrt{3}, \overline{HM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로 } \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\overline{MG} = \sqrt{3}, \overline{MI} = 1 \text{ 이므로 } \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \cos \theta &= \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) \\ &= -(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

16. [출제의도] 치환적분법을 이해하여 함수의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 의 양변을 각각

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$f(x) = t$ 라 할 때 $f'(x) = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 + C_1 \quad (C_1 \text{은 적분상수})$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C_2 \quad (C_2 \text{는 적분상수})$$

그러므로 $\{f(x)\}^3 = 3 \ln(x^2+1) + C$ (C 는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3 = 3 \ln(x^2+1)$ 이므로 $\{f(1)\}^3 = 3 \ln 2$

17. [출제의도] 지수함수를 이용하여 극한값을 추측한다.

점 P의 좌표를 $(a, \ln a)$ ($a > 0$)라 하면 점 Q의 좌표는 (a, e^a)

점 P는 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로 $a + \ln a = t$

$$\ln a e^a = t \text{ 이므로 } a e^a = e^t$$

그러므로 삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{HQ} = \frac{1}{2} \times a \times e^a = \frac{1}{2} a e^a = \frac{1}{2} e^t$$

$$\text{따라서 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2S(t)-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \times \frac{1}{2} e^t - 1}{t} = 1$$

18. [출제의도] 공간벡터의 내적을 이용하여 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$\angle OHC = \theta$ 라 하고 점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심 이므로 $\overline{HG} = \frac{1}{3} \overline{OH}$ 따라서 $\cos \theta = \frac{1}{3}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \overline{OH} \cdot \overline{OP}_k = \sum_{k=1}^n \overline{OH} \cdot (\overline{OH} + \overline{HP}_k)$$

$$= n |\overline{OH}|^2 + \sum_{k=1}^n \overline{OH} \cdot \overline{HP}_k = n |\overline{OH}|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{HO} \cdot \overline{HP}_k$$

$$= n |\overline{OH}|^2 - \sum_{k=1}^n |\overline{HO}| |\overline{HP}_k| \cos \theta$$

$$= 27n - \sum_{k=1}^n \frac{(3\sqrt{3})^2 k}{3n} = 27n - \frac{9}{n} \sum_{k=1}^n k$$

$$= 27n - \frac{9(n+1)}{2} = \frac{45}{2}n - \frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{45}{2} - \frac{9}{2n} \right) = \frac{45}{2}$$

19. [출제의도] 이산확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.

a 와 b 는 $1 \leq a < b \leq n$ 을 만족하는 자연수이고 $b-a$ 의 값이 확률변수 X 이므로 X 가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 이다.

$X=k$ 일 때, $b-a=k$ 에서

$a=b-k$ 이므로 $1 \leq a \leq n-k$ 이고,

$d-c=n-k$ 에서 $c=d-n+k$ 인데

c 는 자연수이고 $d \leq n$ 이므로 $1 \leq c \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 이다.

$$P(X=k) = \frac{(n-k) \times \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-i) \times i}$$

$P(X=k)$ 의 분모를 계산하면

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (n-i) \times i = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (ni - i^2) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

따라서

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \{k \times P(X=k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left\{ k \times \frac{6(n-k) \times \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{n(n-1)(n+1)} \right\}$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \{k \times (n-k) \times \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\} = \frac{n}{2}$$

$f(n) = n-1$, $g(k) = k$, $h(n) = n(n-1)(n+1)$ 에서

$$\frac{h(7)}{f(8) \times g(6)} = \frac{7 \times 6 \times 8}{7 \times 6} = 8$$

20. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을 추측하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를 (x, y) 라 할 때

$$\overline{AP}^2 = (x-t)^2 + y^2 = (x-t)^2 + x^2 - 1$$

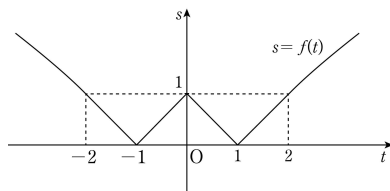
$$= 2x^2 - 2tx + t^2 - 1 = 2 \left(x - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{t^2}{2} - 1$$

$$x^2 = y^2 + 1 \geq 1 \text{ 이므로 } |x| \geq 1$$

$|x| \geq 1$ 이므로 $\frac{t}{2}$ 의 값에 따라 \overline{AP}^2 의 최솟값이 달라진다. 즉, 각 경우에 따라 $f(t)$ 의 값을 구하면

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t^2}{2}-1} & (|t| \geq 2) \\ |t+1| & (-2 < t \leq 0) \\ |t-1| & (0 < t < 2) \end{cases}$$

그러므로 $s = f(t)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $f(t)$ 에서 $t=0$ 을 대입하면 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. 직선 $s = \frac{1}{3}$ 과 곡선 $s = f(t)$ 의 교점의 개수는 4이다. (참)

ㄷ.

$$\lim_{t \rightarrow -2^-} \frac{f(t) - f(-2)}{t - (-2)} = \lim_{t \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1} - 1}{t+2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2^-} \frac{t^2 - 4}{(t+2)\sqrt{2}(\sqrt{t^2-2} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2^-} \frac{t-2}{\sqrt{2}(\sqrt{t^2-2} + \sqrt{2})} = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow -2^+} \frac{f(t) - f(-2)}{t - (-2)} = \lim_{t \rightarrow -2^+} \frac{|t+1| - 1}{t+2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2^+} \frac{-(t+1) - 1}{t+2} = -1$$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = -2$ 에서 미분가능하다.

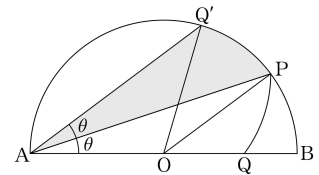
같은 방법을 이용하면 함수 $f(t)$ 는 $t = 2$ 에서도 미분

가능하다는 사실을 알 수 있다.

그러므로 함수 $f(t)$ 가 미분가능하지 않은 t 의 값은 $-1, 0, 1$ 이므로 그 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 미분법을 이용하여 도형의 넓이의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.



색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 펼칠 때 점 Q가 호 AB위에 있게 되는 점을 Q'이라 하자.

도형 AQP와 도형 APQ'은 합동이므로 $S(\theta)$ 는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ'과 현 AQ'으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \{(\pi - 2\theta) - \sin(\pi - 2\theta)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{(\pi - 4\theta) - \sin(\pi - 4\theta)\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (2\theta - \sin 2\theta + \sin 4\theta)$$

$$S'(\theta) = 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 1$$

$$= 2(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) - \cos 2\theta + 1$$

$$= 2(2\cos^2 2\theta - 1) - \cos 2\theta + 1$$

$$= 4\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1$$

$S'(\theta) = 0$ 에서

$$4 \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \right) \left(\cos 2\theta - \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \right) = 0$$

따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 < \cos 2\theta < 1$ 이므로

$$\cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \text{ 인 } \theta \text{에서 } S(\theta) = 0 \text{ 이다.}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ 를 만족시키는 θ 를 θ_0

이라 하면

$\theta < \theta_0$ 일 때 $S'(\theta) > 0$ 이고

$\theta > \theta_0$ 일 때 $S'(\theta) < 0$ 이므로

$S(\theta)$ 는 $\theta = \theta_0$ 에서 최댓값을 갖는다.

그러므로 $\theta_0 = \alpha$

$$\text{따라서 } \cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$$

22. [출제의도] 정규분포를 이해하여 평균을 구한다.

$g(12) = P(4 \leq X \leq 12)$ 가 $g(k)$ 의 최댓값이므로

$$m = \frac{4+12}{2} = 8$$

23. [출제의도] 중복순열을 이해하여 홀수의 개수를 구한다.

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5 중 한 수이므로 3,

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 한 수씩이므로 ${}_5P_2$

$$\text{따라서 } 3 \times {}_5P_2 = 3 \times 5^2 = 75$$

24. [출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.

$x^2 - y^2 - y = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{그러므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y+1} \quad (\text{단, } y \neq -\frac{1}{2})$$

따라서 점 $A(a, b)$ 에서의 접선의 기울기를 구하면

$$\frac{2a}{2b+1} = \frac{2}{15}a \text{ 이고 } a \neq 0 \text{ 이므로 } b = 7$$

25. [출제의도] 미분가능성을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

그러므로 $f(0) = e^b = 1$ 에서 $b=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $a=1$

따라서 $f(10) = e^{10}$ 에서 $k=10$

26. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $f(2n) < f(n) < f(3n)$ 이므로

$n=1$ 일 때, $f(2) < f(1) < f(3)$

$n=2$ 일 때, $f(4) < f(2) < f(6)$

$f(4) < f(2) < f(1) < f(3)$ 이고 $f(2) < f(6)$ 이므로

6개의 숫자 중 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(6)$ 에 대응될

5개를 선택하면 $f(5)$ 에 대응될 나머지 한 수와

5개의 수 중 $f(4), f(2)$ 에 대응될 수가 정해진다.

$f(4), f(2)$ 에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수

중 $f(6)$ 에 대응될 수를 선택하면 $f(1)$ 과 $f(3)$ 에 대응

되는 수도 정해진다.

구하는 경우의 수는 6개의 숫자 중 5개를 선택하는

경우의 수 ${}_6C_5$ 와 $f(4), f(2)$ 에 대응될 두 수를 제외

한 나머지 세 수 중 $f(6)$ 에 대응되는 수를 선택하는

경우의 수 3의 곱과 같다.

따라서 ${}_6C_5 \times 3 = 18$

27. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로

$$\angle QBC = \frac{\theta}{2} \text{ 이고 } \overline{PQ} = \overline{QC} = 3 \tan \frac{\theta}{2}$$

직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP = \theta$ 이므로

$$\overline{PR} = \overline{PQ} \tan \theta = 3 \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \tan \frac{\theta}{2} \times 3 \tan \frac{\theta}{2} \tan \theta = \frac{9}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{8f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{36 \tan^2 \frac{\theta}{2} \tan \theta}{\theta^3} = 9$$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결한다.

원 C_2 의 중심을 O_2 라 하면,

$$\begin{aligned} \overline{PC} \cdot \overline{PQ} &= \overline{PC} \cdot (\overline{PO_2} + \overline{O_2Q}) \\ &= \overline{PC} \cdot \overline{PO_2} + \overline{PC} \cdot \overline{O_2Q} \end{aligned}$$

점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2 를 좌표평면 위에 놓으면

두 점 O_2, C 의 좌표는 각각 $(3, 2), (4, -1)$ 이다.

그러므로 $\overline{PC} \cdot \overline{PO_2} = (4, -1) \cdot (3, 2) = 12 - 2 = 10$

\overline{PC} 와 $\overline{O_2Q}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PC} \cdot \overline{O_2Q} &= |\overline{PC}| |\overline{O_2Q}| \cos \theta \\ &= \sqrt{17} \times 1 \times \cos \theta \leq \sqrt{17} \text{에서} \end{aligned}$$

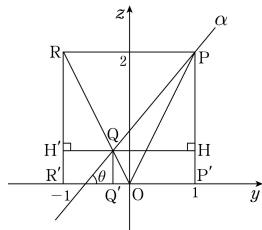
$\theta=0$ 일 때, $\overline{PC} \cdot \overline{O_2Q}$ 의 최댓값은 $\sqrt{17}$

그러므로 $\overline{PC} \cdot \overline{PQ}$ 의 최댓값은 $10 + \sqrt{17}$

따라서 $a+b = 10 + 17 = 27$

29. [출제의도] 평면과 원뿔이 만나서 이루는 도형을 추측하여 좌표를 구한다.

원뿔을 yz 평면으로 자른 단면은 yz 평면 위의 두 점 $P(0, 1, 2), R(0, -1, 2)$ 와 원점 O 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR이다.



선분 OR와 평면 α 의 교점을 Q라 하자.

두 점 P, Q를 xy 평면에 내린 정사영을 각각 P', Q' 이라 할 때 도형 S의 xy 평면 위로의 정사영의 장축

의 길이는 선분 $P'Q'$ 의 길이와 같다. 즉, $\overline{P'Q'} = \frac{5}{4}$

점 Q에서 선분 PP', RR' 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하고 평면 α 와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{RH'} = \overline{PH} = \overline{QH} \tan \theta = \overline{Q'P'} \tan \theta = \frac{5}{4} \tan \theta$$

$$\overline{QH'} = \overline{P'R'} - \overline{P'Q'} = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

삼각형 $RR'O$ 와 삼각형 $RH'Q$ 는 닮음이므로

$$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} = \frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}}$$

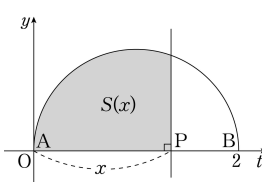
$$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} = 2 \text{ 이고 } \frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}} = \frac{\frac{5}{4} \tan \theta}{\frac{3}{4}} = \frac{5 \tan \theta}{3} \text{ 이므로 } \tan \theta = \frac{6}{5}$$

평면 α 가 z 축과 만나서 생기는 좌표가 $(0, 0, k)$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{2-k}{1} = \frac{6}{5}$$

따라서 $k = \frac{4}{5}$ 이므로 $50k = 40$

30. [출제의도] 함수를 구하여 정적분과 관련된 문제를 해결한다.



$$S(x) = \int_0^x \sqrt{1 - (t-1)^2} dt \text{ 이므로 } S'(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

$f(\theta) = S(1 + \sin \theta) - S(1 + \cos \theta)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= S'(1 + \sin \theta) \cos \theta + S'(1 + \cos \theta) \sin \theta \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sin \theta \\ &= |\cos \theta| \cos \theta + |\sin \theta| \sin \theta \end{aligned}$$

(i) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$f'(\theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 이므로 $f(\theta) = \theta + C_1$ (C_1 은 적분상수)

$$f(0) = S(1) - S(2) = -\frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } C_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } f(\theta) = \theta - \frac{\pi}{4}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ 일 때,

$f'(\theta) = -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = -\cos 2\theta$ 이므로

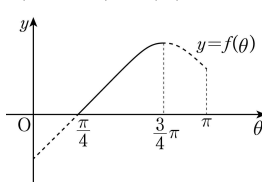
$$f(\theta) = -\frac{1}{2} \sin 2\theta + C_2 \text{ (} C_2 \text{는 적분상수)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S(2) - S(1) = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } C_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } f(\theta) = -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\pi}{4}$$

(i), (ii)에 의해 $y = f(\theta)$ 의 구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 에서의

그래프는 그림의 실선 부분이다.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{32}\pi^2$$

따라서 $p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{32}$ 이므로 $\frac{30p}{q} = 80$

합은 $(-6) + 70 = 64$