2017학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

1	④	2	③	3	③	4	①	5	⑤
6	③	7	⑤	8	①	9	①	10	②
11	②	12	②	13	④	14	①	15	④
16	②	17	①	18	⑤	19	⑤	20	③
21	④	22	8	23	75	24	7	25	10
26	18	27	9	28	27	29	40	30	80

해 설

1. [출제의도] 로그를 포함한 부등식을 계산한다.

x는 진수이므로 $x>0$

$\log_2 x \le 2$에서 $\log_2 x \le \log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $x \le 4$

$0<x\le 4$이므로 정수 x의 개수는 4

2. [출제의도] 좌표공간에서 점과 평면 사이의 거리를 계산한다.

원점 O와 평면 $x+y+z+3=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0+0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$

3. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 계산한다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{10}+\dfrac{2}{5}-0=\dfrac{7}{10}$

4. [출제의도] 정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$

$$=(e-0)-\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=e-(e-1)=1$$

5. [출제의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 계산한다.

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(\overline{X})=\dfrac{5}{6}$ 이고 $\mathrm{E}(X)=a+2b$이므로

$a+2b=\dfrac{5}{6}$

6. [출제의도] 구의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 C는 구 위의 한 점이므로 삼각형 ABC는

$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}\times\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{30}$

$=3\sqrt{5}$

7. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 주기를 구한다.

$f(x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

$=\cos(2x+x)$

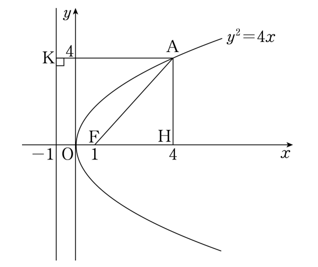
$=\cos 3x$

$f(x)=\cos 3x=\cos(3x+2\pi)$

$=\cos 3\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=f\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2}{3}\pi$

8. [출제의도] 포물선의 정의를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.



포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-1$

점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 K라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{AK}}=\overline{\mathrm{AF}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{FH}}=3$

직각삼각형 AFH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$

9. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

전체 경우의 수는 여섯 명을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 $6!$

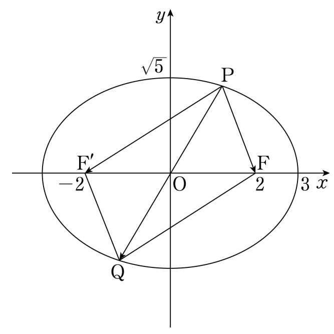
(A,a), (B,b), (C,c)와 같이 각 부부를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 방법의 수는 $3!$

각 묶음 내에서 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2\times2\times2$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3!\times2\times2\times2}{6!}=\dfrac{1}{15}$

10. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$에서 장축의 길이는 6



$\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PF'}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$라 할 때, 점 Q는 타원 위의 점이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 타원의 장축의 길이와 같다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PF}}+\overrightarrow{\mathrm{PF'}}|$의 최댓값은 $2\times3=6$

11. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 산책로를 따라 이동할 확률을 구한다.

사건 X가 일어날 확률 $\mathrm{P}(X)$는

(i) ㉡을 지나는 경우

표에 의하여 확률은 $\dfrac{1}{3}$

(ii) ㉣을 지나는 경우

㉣을 지나기 위해서는 ㉠을 지나야 하므로

표에 의하여 확률은 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(iii) ㉤을 지나는 경우

(ii)와 같은 방법으로 $\dfrac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에 의해서

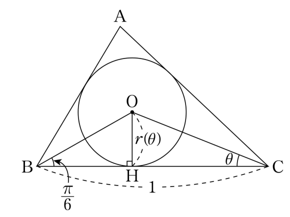
$\mathrm{P}(X)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

두 사건 X, Y가 동시에 일어날 확률 $\mathrm{P}(X\cap Y)$는

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{1}{2}$

12. [출제의도] 몫의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle\mathrm{OBH}=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{OCH}=\theta$

$\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\tan\dfrac{\pi}{6}$ 에서 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{BH}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}\,r(\theta)$

$\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$ 에서 $\dfrac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}$

$\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$\sqrt{3}\,r(\theta)+\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}=1$, $r(\theta)=\dfrac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta)=\dfrac{r(\theta)}{\tan\theta}$ 이므로 $h(\theta)=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

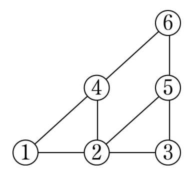
$h(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면

$h'(\theta)=-\dfrac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$

따라서 $h'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

13. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

그림과 같이 6개의 섬에 ①부터 ⑥까지의 번호를 부여하자.



②번 섬은 다른 4개의 섬과 다리로 연결되어 있으므로 ②번 섬에 세우는 깃발의 색부터 먼저 고려한다.

②번 섬에 깃발을 세우는 경우의 수는 3

②번 섬에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 항상 ⑥번 섬에 세워야 한다.

남은 두 색의 깃발 중 한 가지 색을 선택하여 ①번 섬에 깃발을 세우는 경우의 수는 2

①번 섬에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 ③번 또는 ⑤번 섬에 세워야 한다.

그러므로 두 섬 중 한 섬을 선택하는 경우의 수는 2

나머지 두 섬에는 남은 깃발을 세운다.

따라서 섬에 깃발을 세우는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

14. [출제의도] 함수와 그 함수의 역함수의 미분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$이므로

$f'(g(x))g'(x)=1$, $g'(f(x))f'(x)=1$

따라서

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g'(x)+g(x)f'(x)\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g(x)\}'\,dx$$

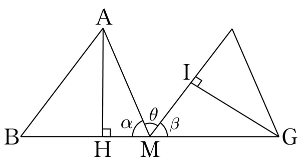
$$=\Big[f(x)g(x)\Big]_1^3$$

$=f(3)g(3)-f(1)g(1)$

$f(1)=3$에서 $g(3)=1$, $g(1)=3$에서 $f(3)=1$

따라서 $f(3)g(3)-f(1)g(1)=1\times1-3\times3=-8$

15. [출제의도] 두 평면의 위치 관계를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.



평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 예각을 α, 평면 EDCF와 평면 GDC가 이루는 예각을 β라 하자.

모서리 CD의 중점을 M, 점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H, 점 G에서 사각형 EDCF에 내린 수선의 발을 I라 하면,

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{HM}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$

$\overline{\mathrm{MG}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MI}}=1$이므로 $\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $\cos\theta=\cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$

$=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=-\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16. [출제의도] 치환적분법을 이해하여 함수의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\{f(x)\}^2f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$의 양변을 각각 x에 대하여 적분하면

$\displaystyle\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$

$f(x)=t$라 할 때 $f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$\displaystyle\int\{f(x)\}^2f'(x)\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C_1$

$=\dfrac{1}{3}\{f(x)\}^3+C_1$ (C_1은 적분상수)

$\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C_2$ (C_2는 적분상수)

그러므로 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)+C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^3=3\ln(x^2+1)$ 이므로 $\{f(1)\}^3=3\ln2$

17. [출제의도] 지수함수를 이용하여 극한값을 추측한다.

점 P의 좌표를 $(a,\ln a)$ $(a>0)$라 하면 점 Q의 좌표는 (a, e^a)

점 P는 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로 $a+\ln a=t$

$\ln ae^a=t$ 이므로 $ae^a=e^t$

그러므로 삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\dfrac{1}{2}\times a\times e^a=\dfrac{1}{2}ae^a=\dfrac{1}{2}e^t$

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{2\times\frac{1}{2}e^t-1}{t}=1$

18. [출제의도] 공간벡터의 내적을 이용하여 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{OHC}=\theta$라 하고 점 O에서 밑면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 하면 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 $\overline{\mathrm{HG}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{OH}}$ 따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}\right)$

$\displaystyle=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2-\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{\mathrm{HO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}$

$\displaystyle=n\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|\overrightarrow{\mathrm{HO}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}_k}\right|\cos\theta$

$\displaystyle=27n-\sum_{k=1}^{n}\frac{(3\sqrt{3})^2k}{3n}=27n-\frac{9}{n}\sum_{k=1}^{n}k$

$=27n-\dfrac{9(n+1)}{2}=\dfrac{45}{2}n-\dfrac{9}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{45}{2}-\frac{9}{2n}\right)=\frac{45}{2}$

19. [출제의도] 이산확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.

a와 b는 $1\le a<b\le n$을 만족하는 자연수이고

$b-a$의 값이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 가장 작은 값은 1, 가장 큰 값은 $\boxed{n-1}$이다.

$X=k$일 때, $b-a=k$에서

$a=b-k$이므로 $1\le a\le n-k$이고,

$d-c=n-k$에서 $c=d-n+k$인데

c는 자연수이고 $d\le n$이므로 $1\le c\le\boxed{k}$이다.

$1\le a\le n-k$, $1\le c\le k$에서

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{(n-k)\times\boxed{k}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{\boxed{n-1}}(n-i)\times i}$

$\mathrm{P}(X=k)$의 분모를 계산하면

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\times i=\sum_{i=1}^{n-1}(ni-i^2)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

따라서

$\displaystyle\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\left\{k\times\frac{6(n-k)\times\boxed{k}}{n(n-1)(n+1)}\right\}$

$\displaystyle=\frac{6}{\boxed{n(n-1)(n+1)}}\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\left\{k\times(n-k)\times\boxed{k}\right\}=\frac{n}{2}$

$f(n)=n-1$, $g(k)=k$, $h(n)=n(n-1)(n+1)$에서

$\dfrac{h(7)}{f(8)\times g(6)}=\dfrac{7\times6\times8}{7\times6}=8$

20. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을 추측하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-t)^2+y^2=(x-t)^2+x^2-1$

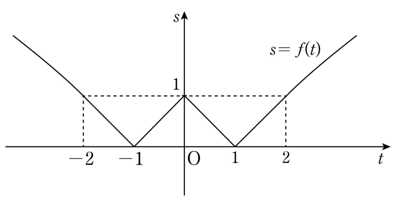
$=2x^2-2tx+t^2-1=2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{2}-1$

$x^2=y^2+1\ge1$이므로 $|x|\ge1$

$|x|\ge1$이므로 $\dfrac{t}{2}$의 값에 따라 $\overline{\mathrm{AP}}^2$의 최솟값이 달라진다. 즉, 각 경우에 따라 $f(t)$의 값을 구하면

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{t^2}{2}-1} & (|t|\ge2)\\ |t+1| & (-2<t\le0)\\ |t-1| & (0<t<2)\end{cases}$$

그러므로 $s=f(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $f(t)$에서 $t=0$을 대입하면 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. 직선 $s=\dfrac{1}{3}$과 곡선 $s=f(t)$의 교점의 개수는 4이다. (참)

ㄷ.

$\displaystyle\lim_{t\to-2-}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\lim_{t\to-2-}\frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}-1}-1}{t+2}$

$\displaystyle=\lim_{t\to-2-}\frac{t^2-4}{(t+2)\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to-2-}\frac{t-2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{t^2-2}+\sqrt{2}\right)}=-1$

$\displaystyle\lim_{t\to-2+}\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\lim_{t\to-2+}\frac{|t+1|-1}{t+2}$

$\displaystyle=\lim_{t\to-2+}\frac{-(t+1)-1}{(t+2)}=-1$

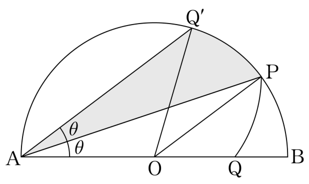
따라서 함수 $f(t)$는 $t=-2$에서 미분가능하다.

같은 방법을 이용하면 함수 $f(t)$는 $t=2$에서도 미분가능하다는 사실을 알 수 있다.

그러므로 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 t의 값은 -1, 0, 1이므로 그 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 미분법을 이용하여 도형의 넓이의 최댓값을 구하는 문제를 해결한다.



색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB위에 있게 되는 점을 Q′이라 하자.

도형 AQP와 도형 APQ′은 합동이므로 $S(\theta)$는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형에서 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\{(\pi-2\theta)-\sin(\pi-2\theta)\}$

$-\dfrac{1}{2}\{(\pi-4\theta)-\sin(\pi-4\theta)\}$

$=\dfrac{1}{2}(2\theta-\sin2\theta+\sin4\theta)$

$S'(\theta)=2\cos4\theta-\cos2\theta+1$

$=2(\cos^22\theta-\sin^22\theta)-\cos2\theta+1$

$=2(2\cos^22\theta-1)-\cos2\theta+1$

$=4\cos^22\theta-\cos2\theta-1$

$S'(\theta)=0$에서

$4\left(\cos2\theta-\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(\cos2\theta-\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right)=0$

따라서 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $0<\cos2\theta<1$이므로

$\cos2\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ 인 θ에서 $S(\theta)=0$이다.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$에서 $\cos2\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ 를 만족시키는 θ를 θ_0이라 하면

$\theta<\theta_0$일 때 $S'(\theta)>0$이고

$\theta>\theta_0$일 때 $S'(\theta)<0$이므로

$S(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 최댓값을 갖는다.

그러므로 $\theta_0=\alpha$

따라서 $\cos2\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

22. [출제의도] 정규분포를 이해하여 평균을 구한다.

$g(12)=\mathrm{P}(4\le X\le12)$가 $g(k)$의 최댓값이므로

$m=\dfrac{4+12}{2}=8$

23. [출제의도] 중복순열을 이해하여 홀수의 개수를 구한다.

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5 중 한 수이므로 3,

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5 중 한 수씩이므로 ${}_5\Pi_2$

따라서 $3\times{}_5\Pi_2=3\times5^2=75$

24. [출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.

$x^2-y^2-y=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{dy}{dx}=0$

그러므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{2y+1}$ (단, $y\ne-\dfrac{1}{2}$)

따라서 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서의 접선의 기울기를 구하면

$\dfrac{2a}{2b+1}=\dfrac{2}{15}a$이고 $a\ne0$이므로 $b=7$

25. [출제의도] 미분가능성을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$x=0$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$
그러므로 $f(0)=e^b=1$에서 $b=0$
$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$
$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 $a=1$
따라서 $f(10)=e^{10}$에서 $k=10$

26. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (나)에서 $f(2n)<f(n)<f(3n)$이므로
$n=1$일 때, $f(2)<f(1)<f(3)$
$n=2$일 때, $f(4)<f(2)<f(6)$
$f(4)<f(2)<f(1)<f(3)$ 이고 $f(2)<f(6)$이므로
6개의 숫자 중 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$에 대응될 5개를 선택하면 $f(5)$에 대응될 나머지 한 수와
5개의 수 중 $f(4)$, $f(2)$에 대응될 수가 정해진다.
$f(4)$, $f(2)$에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$에 대응될 수를 선택하면 $f(1)$과 $f(3)$에 대응되는 수도 정해진다.
구하는 경우의 수는 6개의 숫자 중 5개를 선택하는 경우의 수 ${}_6C_5$와 $f(4)$, $f(2)$에 대응될 두 수를 제외한 나머지 세 수 중 $f(6)$에 대응되는 수를 선택하는 경우의 수 3의 곱과 같다.
따라서 ${}_6C_5\times3=18$

27. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

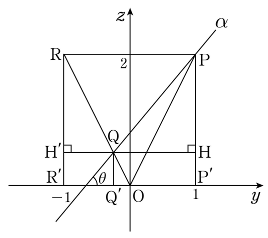
삼각형 BPQ와 삼각형 BCQ는 서로 합동이므로
$\angle QBC=\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{PQ}=\overline{QC}=3\tan\frac{\theta}{2}$
직각삼각형 RPQ에서 $\angle RQP=\theta$이므로
$\overline{PR}=\overline{PQ}\tan\theta=3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta$
$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{PR}$
$=\frac{1}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\times3\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta=\frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta$
따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{8f(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\tan^2\frac{\theta}{2}\tan\theta}{\theta^3}=9$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결한다.

원 C_2의 중심을 O_2라 하면,
$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{O_2Q})$
$=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$
점 P가 원점에, 선분 AB가 y축 위에 오도록 정사각형 ABCD와 두 원 C_1, C_2를 좌표평면 위에 놓으면 두 점 O_2, C의 좌표는 각각 $(3,\ 2)$, $(4,\ -1)$이다.
그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PO_2}=(4,\ -1)\cdot(3,\ 2)=12-2=10$
$\overrightarrow{PC}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 θ라 하면
$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=|\overrightarrow{PC}||\overrightarrow{O_2Q}|\cos\theta$
$=\sqrt{17}\times1\times\cos\theta\le\sqrt{17}$에서
$\theta=0$일 때, $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값은 $\sqrt{17}$
그러므로 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PQ}$의 최댓값은 $10+\sqrt{17}$
따라서 $a+b=10+17=27$

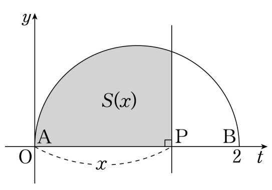
29. [출제의도] 평면과 원뿔이 만나서 이루는 도형을 추측하여 좌표를 구한다.

원뿔을 yz평면으로 자른 단면은 yz평면 위의 두 점 $P(0,1,2)$, $R(0,-1,2)$와 원점 O를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 OPR이다.

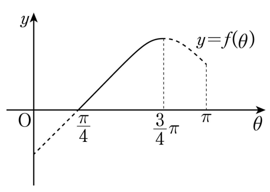


선분 OR와 평면 α의 교점을 Q라 하자.
두 점 P, Q를 xy평면에 내린 정사영을 각각 P′, Q′이라 할 때 도형 S의 xy평면 위로의 정사영의 장축의 길이는 선분 P′Q′의 길이와 같다. 즉, $\overline{P'Q'}=\frac{5}{4}$
점 Q에서 선분 PP′, RR′에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하고 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overline{RH'}=\overline{PH}=\overline{QH}\tan\theta=\overline{Q'P'}\tan\theta=\frac{5}{4}\tan\theta$
$\overline{QH'}=\overline{P'R'}-\overline{P'Q'}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$
삼각형 RR′O와 삼각형 RH′Q는 닮음이므로
$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}}=\frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}}$에서
$\frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}}=2$이고 $\frac{\overline{RH'}}{\overline{QH'}}=\frac{\frac{5}{4}\tan\theta}{\frac{3}{4}}=\frac{5\tan\theta}{3}$이므로 $\tan\theta=\frac{6}{5}$
평면 α가 z축과 만나서 생기는 좌표가 $(0,0,k)$이므로 $\tan\theta=\frac{2-k}{1}=\frac{6}{5}$
따라서 $k=\frac{4}{5}$이므로 $50k=40$

30. [출제의도] 함수를 구하여 정적분과 관련된 문제를 해결한다.



$S(x)=\int_0^x\sqrt{1-(t-1)^2}\,dt$이므로 $S'(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$
$f(\theta)=S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$라 하면
$f'(\theta)=S'(1+\sin\theta)\cos\theta+S'(1+\cos\theta)\sin\theta$
$=\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta+\sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta$
$=|\cos\theta|\cos\theta+|\sin\theta|\sin\theta$
(ⅰ) $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$일 때,
$f'(\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로 $f(\theta)=\theta+C_1$ (C_1은 적분상수)
$f(0)=S(1)-S(2)=-\frac{\pi}{4}$이므로 $C_1=-\frac{\pi}{4}$
따라서 $f(\theta)=\theta-\frac{\pi}{4}$
(ⅱ) $\frac{\pi}{2}\le\theta<\pi$일 때,
$f'(\theta)=-\cos^2\theta+\sin^2\theta=-\cos2\theta$이므로
$f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+C_2$ (C_2는 적분상수)
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S(2)-S(1)=\frac{\pi}{4}$이므로 $C_2=\frac{\pi}{4}$
따라서 $f(\theta)=-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $y=f(\theta)$의 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right]$에서의 그래프는 그림의 실선 부분이다.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}f(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin2\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{4}\cos2\theta+\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\pi^2$$
따라서 $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{32}$이므로 $\frac{30p}{q}=80$