



정삼각형에 내접한다. 새로 그려진 원의 중심은 이 정삼각형의 무게중심이므로 반지름의 길이는  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 원의 넓이비가  $\sqrt{3} : \frac{2\sqrt{3}}{3} = 3:2$ 이고 넓이의 비는 9:4이므로  $R_2$ 에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이는  $\frac{4}{9}S_1$ 이다.  
 $R_{n+1}$ 에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이는  $R_n$ 에서 추가로 색칠된 도형의 넓이의  $\frac{4}{9}$ 배이다.

따라서 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{18\pi - 9\sqrt{3}}{10}$$

19. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정을 추론한다.

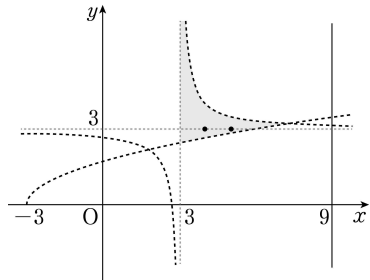
주사위의 눈이 처음부터 6의 약수가 연속으로 5회 나오는 경우 확률변수  $X$ 는 최댓값을 갖고 그 값은 10이므로  $a=10$   
6의 약수인 눈이 나오는 경우를 ○,  
6의 약수가 아닌 눈이 나오는 경우를 ×라 하자.  
 $X=3$ 인 경우는  
6의 약수인 눈이 1회, 6의 약수가 아닌 눈이 5회 나오는 경우의  ${}_6C_1$ 가지 중 ×××××○, ××××○×인 경우를 제외한  ${}_6C_1 - 2$ 가지이므로  $b=4$   
 $X=9$ 인 경우는  
6의 약수인 눈이 5회, 6의 약수가 아닌 눈이 1회 나오는 경우의  ${}_6C_1$ 가지 중 ○○○○×인 경우를 제외한  ${}_6C_1 - 1$ 가지이므로  $c=5$   
따라서  $a+b+c=10+4+5=19$

20. [출제의도] 다항함수의 미분법과 적분법을 이용하여 함수값을 구하는 문제를 해결한다.

삼차항의 계수가 1이고 방정식  $f(x)=f(4)$ 는 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 가지 경우가 있다.  
(i) 함수  $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프가  $x=2$ 에서  $x$ 축에 접하고  $x=4$ 에서 만나는 경우  
 $f(x)=(x-2)^2(x-4)+f(4)$   
 $f'(x)=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)(3x-10)$ 이므로  $f'(\frac{11}{3})>0$ 이고 조건 (가)를 만족시키지 않는다.  
(ii) 함수  $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프가  $x=4$ 에서  $x$ 축에 접하는 경우  
 $f(2)=0, f'(4)=0$ 이므로  
 $f'(x)=3(x-2)(x-4), f'(\frac{11}{3})<0$   
 $f(x)=\int 3(x-2)(x-4) dx = x^3 - 9x^2 + 24x + C$  (단,  $C$ 는 상수이다.)  
 $f(2)=C+20=35$ 이므로  $C=15$   
 $f(x)=x^3 - 9x^2 + 24x + 15$   
따라서  $f(0)=15$

21. [출제의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 점의 개수를 추론한다.

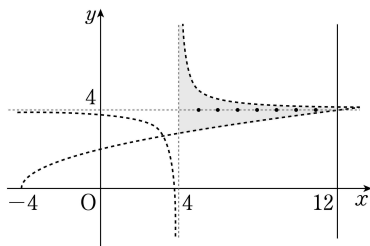
(i)  $n=1$  또는  $n=2$ 인 경우  
주어진 조건을 만족시키는 점  $P(a, b)$ 가 존재하지 않으므로  $A_1=0, A_2=0$   
(ii)  $n=3$ 인 경우  
 $f(x)=\frac{1}{x-3}+3, g(x)=\sqrt{x+3}$  이고  
조건을 만족시키는 점  $P(a, b)$ 는 (4, 3), (5, 3)이므로  $A_3=2$



(iii)  $n=4$ 인 경우

$f(x)=\frac{1}{x-4}+4, g(x)=\sqrt{x+4}$  이고

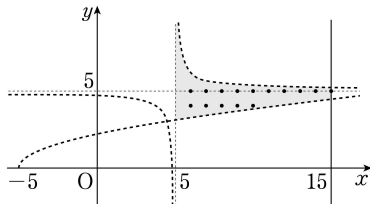
조건을 만족시키는 점  $P(a, b)$ 는 (5, 4), (6, 4), (7, 4), (8, 4), (9, 4), (10, 4), (11, 4)이므로  $A_4=7$



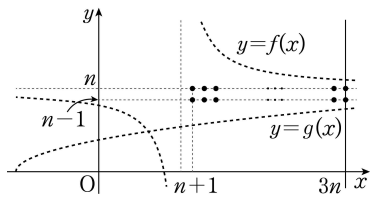
(iv)  $n=5$ 인 경우

$f(x)=\frac{1}{x-5}+5, g(x)=\sqrt{x+5}$  이고

조건을 만족시키는 점  $P(a, b)$ 는 (6, 4), (7, 4), (8, 4), (9, 4), (10, 4), (6, 5), (7, 5), ..., (15, 5)이므로  $A_5=15$



(v)  $n \geq 6$ 인 경우



$y$ 좌표가  $n$ 인  $2n$ 개의 점  $(n+1, n), (n+2, n), \dots, (3n, n)$  과  $y$ 좌표가  $n-1$ 인  $2n$ 개의 점  $(n+1, n-1), (n+2, n-1), \dots, (3n, n-1)$  이 모두 조건을 만족시킨다.  
즉,  $A_n \geq 4n$   
(i)~(v)에 의하여  $n \leq A_n \leq 3n$ 을 만족시키는 모든  $A_n$ 의 값의 합은  $A_4+A_5=7+15=22$

22. [출제의도] 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구한다.

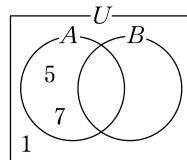
${}_nP_2 = n(n-1) = 110$ 이므로  
 $(n-11)(n+10) = 0$   
 $n$ 이 자연수이므로  $n=11$

23. [출제의도] 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

$f'(x) = 16x^3 + 14x$ 이므로  
 $f'(1) = 16 + 14 = 30$

24. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로  
두 집합  $A^c \cap B^c$ 과  $B^c$ 의 원소를 벤다이어그램을 이용하여 나타내면 오른쪽 그림과 같다.  
 $A-B = \{5, 7\}$ 이므로  
 $A-B$ 의 원소의 합은 12



25. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 수열의 합을

구하는 문제를 해결한다.

$\sum_{k=1}^n a_k = \log_2(n^2+n)$ 이므로  

$$a_n = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= \log_2(n^2+n) - \log_2(n^2-n)$$

$$= \log_2 \frac{n+1}{n-1} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$a_{2n+1} = \log_2 \frac{n+1}{n} \quad (\text{단, } n \geq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1} = \log_2 2 + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \dots + \log_2 \frac{16}{15}$$

$$= \log_2 \left( 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{16}{15} \right) = 4$$

26. [출제의도] 접선의 방정식을 이해하여 수열의 합을 구한다.

함수  $y=x^3+2$ 의 그래프와 직선  $y=kx$ 는 제3사분면에서 1개의 교점을 갖는다.  
함수  $y=x^3+2$ 의 그래프와 직선  $y=kx$ 가 접하는 경우 그 접점의 좌표를  $(t, t^3+2)$ 라 하자.  
접선의 방정식은  $y-(t^3+2) = 3t^2(x-t)$  이고 접선이 원점을 지나므로  $t^3=1$   
 $t$ 는 실수이므로  $t=1$ 이고 접점의 좌표는 (1, 3)이다.  
원점을 지나는 접선의 기울기가 3이므로  $f(3)=2$   
 $f(1)=1, f(2)=1, k>3$ 인 경우  $f(k)=3$   
따라서  $\sum_{k=1}^6 f(k) = 1+1+2+3+3+3=13$

27. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

$F(x) = P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-m}{\sigma}\right)$   
 $F\left(\frac{13}{2}\right) = 0.8413, P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로  
 $\frac{\frac{13}{2}-m}{\sigma} = 1, \sigma = \frac{13}{2}-m \dots \dots \textcircled{1}$

$0.5 \leq F\left(\frac{11}{2}\right) \leq 0.6915$ 이므로

$0 \leq \frac{\frac{11}{2}-m}{\sigma} \leq 0.5 \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 에  $\textcircled{1}$ 을 대입하여 정리하면  
 $\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{11}{2}$  이고  $m$ 이 자연수이므로

$m=5, \sigma = \frac{3}{2}$   
 $F(k) = 0.9772$ 이므로  
 $\frac{k-5}{\frac{3}{2}} = 2, k=8$

28. [출제의도] 중복조합을 이해하여 순서쌍의 개수를 구한다.

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로  
조건 (가)를 만족하는  $(a, b, c)$ 의 개수는  
 $a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}, b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}, c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$ 에서 (단,  $i=1, 2, 3$ 에 대하여  $x_i, y_i, z_i$ 는 음이 아닌 정수)  
 $x_1+x_2+x_3=2, y_1+y_2+y_3=2, z_1+z_2+z_3=1$   
 ${}_3H_2 \times {}_3H_2 \times {}_3H_1 = {}_4C_2 \times {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 108 \dots \dots \textcircled{1}$

조건 (나)는  $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이므로 이를 만족하지 않는 경우는  $a=b$  또는  $a=c$  또는  $b=c$ 이다.  
이 중  $a=b=c$ 인 경우는 존재하지 않는다.  
 $a, b, c$  중 두 수가 같은 순서쌍은 (1, 1, 180), (2, 2, 45), (3, 3, 20), (6, 6, 5), (1, 180, 1), (2, 45, 2), (3, 20, 3), (6, 5, 6), (180, 1, 1), (45, 2, 2), (20, 3, 3), (5, 6, 6)이므로 조건 (나)를 만족하지 않는 순서쌍의 개수는 12  $\dots \dots \textcircled{2}$

따라서 ㉠, ㉡에 의하여  $108 - 12 = 96$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항의 값을 추론한다.

점  $P_1$ 의 좌표는  $(1, 0)$ , 두 점  $Q_1, Q_2$ 의 좌표가 각각  $(0, 0), (1, -1)$ 이고 점  $P_1$ 이 삼각형  $Q_1Q_2Q_3$ 의 무게중심이므로  $Q_3$ 의 좌표는  $(2, 1)$ 이다.

점  $P_2$ 의 좌표는  $(2, a)$ , 두 점  $Q_2, Q_3$ 의 좌표가 각각  $(1, -1), (2, 1)$ 이고 점  $P_2$ 는 삼각형  $Q_2Q_3Q_4$ 의 무게중심이므로  $Q_4$ 의 좌표는  $(3, 3a)$ 이다.

같은 방법으로  $Q_7$ 의 좌표를 구하면  $(6, 6a)$ 이고  $Q_{10}$ 의 좌표를 구하면  $(9, 9a)$ 이므로  $9a = 90, a = 10$  따라서  $Q_{13}$ 의 좌표는  $(12, 120)$ 이므로  $p+q = 132$

30. [출제의도] 도형의 평행이동과 함수의 미분가능성을 이해하여 주어진 문제를 해결한다.

함수  $g(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 9, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{3}{2}|3k-9| \text{ 이므로}$$

$$9 = \frac{3}{2}|3k-9|$$

$$|k-3|=2$$

$$k=1 \text{ 또는 } k=5$$

(i)  $k=1$ 인 경우

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=3$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{g(x)h(x) - g(3)h(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3x-9)h(x)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} 3h(x) = 3h(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x)h(x) - g(3)h(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(9-3x)h(x)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \{-3h(x)\} = -3h(3)$$

$$3h(3) = -3h(3) \text{ 이므로}$$

$$h(3) = 0 \dots\dots \text{㉠}$$

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)h(x) - g(0)h(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(9-3x)h(x) - 9h(0)}{x} = 9h'(0) - 3h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)h(x) - g(0)h(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2}(6-3x)h(x) - 9h(0)}{x}$$

$$= 9h'(0) - \frac{9}{2}h(0)$$

$$9h'(0) - 3h(0) = 9h'(0) - \frac{9}{2}h(0), \quad h(0) = 0 \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여  $h(x) = x(x-3)(x+\alpha)$

(단,  $\alpha$ 는 상수)이고, 조건 (나)에 의해

$$h'(3) = 27 + 6(\alpha-3) - 3\alpha = 15, \quad 3\alpha = 6, \quad \alpha = 2$$

$$h(x) = x(x-3)(x+2) = x^3 - x^2 - 6x$$

그러므로  $k=1$ 일 때  $h(1) = -6$

(ii)  $k=5$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로

$$h(3) = h(0) = h(-2) = 0 \text{ 이고}$$

$$h(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

그러므로  $k=5$ 일 때  $h(5) = 70$

(iii)  $k \neq 1, k \neq 5$ 인 경우

함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이 아니고

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)h(x) = g(0)h(0)$$

$$\frac{3}{2}|3k-9| \times h(0) = 9h(0)$$

$$h(0) = 0 \dots\dots \text{㉢}$$

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)h(x) - g(0)h(0)}{x-0} = \frac{3}{2}|3k-9| \times h'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)h(x) - g(0)h(0)}{x-0} = 9h'(0)$$

$$\frac{3}{2}|3k-9| \times h'(0) = 9h'(0) \text{ 이므로 } h'(0) = 0 \dots\dots \text{㉣}$$

함수  $g(x)h(x)$ 가  $x=3$ 에서 미분가능하므로

㉠과 같은 방법으로  $h(3) = 0 \dots\dots \text{㉤}$

㉢, ㉣, ㉤에 의하여  $h(x)$ 는  $x^2$ 과  $x-3$ 을 인수로

가지므로  $h(x) = x^2(x-3), h'(3) = 9$

조건 (나)를 만족시키지 않으므로  $h(x)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 모든  $h(k)$ 의 값의

$$\text{합은 } (-6) + 70 = 64$$

