2017학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가 형]

1	②	**2**	②	**3**	③	**4**	③	**5**	⑤
6	⑤	**7**	①	**8**	④	**9**	⑤	**10**	①
11	④	**12**	②	**13**	③	**14**	④	**15**	①
16	②	**17**	④	**18**	③	**19**	①	**20**	⑤
21	①	**22**	10	**23**	301	**24**	117	**25**	7
26	66	**27**	210	**28**	3	**29**	21	**30**	8

1. [출제의도] 로그함수의 미분 계산하기

$f'(x)=\frac{1}{x}$ 이므로 $f'(3)=\frac{1}{3}$

2. [출제의도] 삼각함수의 값 계산하기

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

3. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{2x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^3=e^3$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(0)=1,\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)=-1$이므로

$f(0)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)=0$

5. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=x^3-3x^2+C$(단, C는 적분상수)

$f(0)=C=7$이므로 $f(x)=x^3-3x^2+7$

따라서 $f(1)=5$

6. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$y'=3x^2-5$이므로 점 $(2,\,-2)$에서의

접선의 기울기는 7이고 접선의 방정식은

$y=7x-16$이다.

$\therefore\ m=7,\ n=-16$

따라서 $m+n=-9$

7. [출제의도] 로그를 포함한 부등식 이해하기

진수 조건에 의해 $x>0$ ⋯⋯ ㉠

$1+\log_2 x\le\log_2(x+5)$

$\log_2 2x\le\log_2(x+5)$

$2x\le x+5$

$x\le5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le5$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5이고 합은 15

8. [출제의도] 다항함수의 미분 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$에서 미분가능해야 한다.

(ⅰ) $x=1$에서 연속

$\lim\limits_{x\to1-}(ax^2+1)=\lim\limits_{x\to1+}(x^3+bx+1)=f(1)$

$a=b+1$ ⋯⋯ ㉠

(ⅱ) $x=1$에서 미분가능

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^3+bx+1-(b+2)}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x^2+x+b+1)=b+3$$

$2a=b+3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=1$

$\therefore\ f'(1)=4$

9. [출제의도] 삼각함수의 미분 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\pi-2h)-f(\pi)}{h}=-2f'(\pi)$

$f'(x)=x\cos x$이므로 $-2f'(\pi)=2\pi$

10. [출제의도] 정적분의 뜻 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$

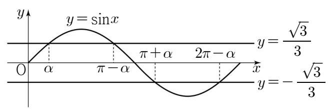
$=\frac{1}{2}\int_0^2(6x^2+x)dx=\frac{1}{2}\left[2x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=9$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로 $\sin^2 x=\frac{1}{3}$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$이므로



구하는 해는 $x=\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha$

따라서 모든 해의 합은 4π

12. [출제의도] 로그함수 이해하기

$\log_2(x^2-2x+a)$의 밑이 1보다 크므로

x^2-2x+a가 최소일 때, 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서 x^2-2x+a의 최솟값은 $2^3=8$이다.

$x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$

$[-1,\,2]$에서 $x=1$일 때 x^2-2x+a는

최솟값 $a-1$을 가지므로 $a-1=8$

$\therefore\ a=9$

13. [출제의도] 함수의 연속의 성질 이해하기

함수 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x+k-3$은

$f'(x)>0$이므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\,2]$에서 연속이고

$f(0)=k-3,\ f(2)=k+6$

이때 $f(0)f(2)<0$이면 사이값 정리에 의해 방정식

$f(x)=0$은 열린 구간 $(0,\,2)$에서 실근을 갖는다.

$(k-3)(k+6)<0$

$\therefore\ -6<k<3$

따라서 정수 k의 개수는 8

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$x^3-3x^2+x=x-4$

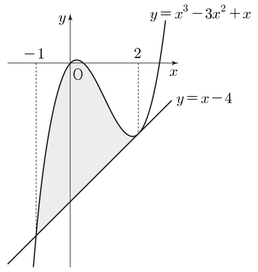
$(x+1)(x-2)^2=0$이므로

곡선 $y=x^3-3x^2+x$와 직선 $y=x-4$가

만나는 점의 x좌표는 -1과 2

$\int_{-1}^{2}\left|(x^3-3x^2+x)-(x-4)\right|dx$

$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}$



15. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^4-4x-a^2+a+9$라 하면

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로

최솟값은 $f(1)=-a^2+a+6$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge0$이 성립하려면

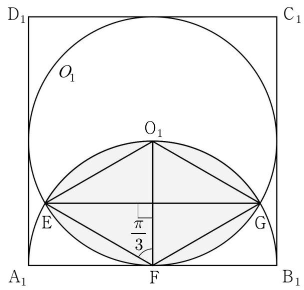
$-a^2+a+6\ge0$

$\therefore\ -2\le a\le3$

따라서 정수 a의 개수는 6

16. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서



원 O_1의 중심 $\mathrm{O_1}$과 세 점 E, F, G가 있다.

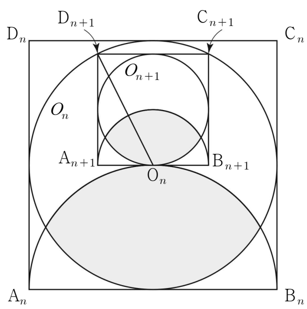
두 삼각형 $\mathrm{O_1EF}$, $\mathrm{O_1FG}$는 정삼각형이다.

S_1은 점 $\mathrm{O_1}$을 포함하는 부채꼴 FGE의 넓이에서 삼각형 FGE의 넓이를 뺀 값의 두 배이므로

$S_1=2\left\{\left(\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{2}{3}\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}\right)\right\}$

$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부에 선분 $\mathrm{D_{n+1}O_n}$을 그린 그림이다.



$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}=a\,(a\ne0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{D}_{n+1}\mathrm{O}_n}=\frac{a}{2}$이고,

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}_n\mathrm{D}_{n+1}$이 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과

정사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$은 서로 닮음이고

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n} : \overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}} = a : \dfrac{a}{\sqrt{5}} = 1 : \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 얻어진

⬭ 모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1 : \dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1 : \dfrac{1}{5}$이다.

S_n은 첫째항이 $\dfrac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$이고 공비가 $\dfrac{1}{5}$인

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

17. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 추론하기

$a>1$일 때, $\mathrm{A}(a, \log_2 a)$, $\mathrm{B}(a, a)$,

$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{a}, \log_2 a\right)$, $\mathrm{D}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^a, a\right)$, $\mathrm{E}(2^a, a)$이고

$\overline{\mathrm{DE}} = \dfrac{15}{4}$이므로 $2^a - \left(\dfrac{1}{2}\right)^a = \dfrac{15}{4}$

$2^a = 4$, $a = 2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CA}} = a - \dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{2}$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t) = \displaystyle\int_0^t v_1(t)dt = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2$

$x_2(t) = \displaystyle\int_0^t v_2(t)dt = \boxed{-\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2}$

출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$t=6$이다.

$0<t\le 6$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를

$l(t)$라 하면

$l(t) = \left|\dfrac{1}{6}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 - \left(-\dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2\right)\right| = \left|\dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2\right|$

$g(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2$이라 하면

$g'(t) = 0$에서 $t = 0,\ 4$

따라서 $l(t)$는 $t = \boxed{4}$일 때 극대이면서 최대이므로

$l(t)$의 최댓값은 $\boxed{\dfrac{32}{3}}$이다.

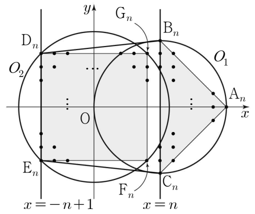
(가)에 알맞은 식은 $f(t) = -\dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2$

(나), (다)에 알맞은 수는 각각 $a=4$, $b=\dfrac{32}{3}$

$\therefore\ \dfrac{a\times b}{f(2)} = 64$

19. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 추론하기

각 점의 좌표는 그림과 같다.



$\mathrm{A}_n(2n, 0)$, $\mathrm{B}_n(n, n)$, $\mathrm{C}_n(n, -n)$,

$\mathrm{D}_n(-n+1, n-1)$, $\mathrm{E}_n(-n+1, -n+1)$,

$\mathrm{F}_n(n-1, -n+1)$, $\mathrm{G}_n(n-1, n-1)$

오각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{C}_n$에서

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수는

$1+3+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$

변 $\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n$ 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인

점들의 개수는 $2n-1$이므로

정사각형 $\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n\mathrm{G}_n\mathrm{D}_n$의 둘레 및 내부에 있는 점

중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수는

$(2n-1)^2$

$a_n = (n+1)^2 + (2n-1)^2 = 5n^2 - 2n + 2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}n - \sqrt{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}n - \sqrt{5n^2-2n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{\sqrt{5}n + \sqrt{5n^2-2n+2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

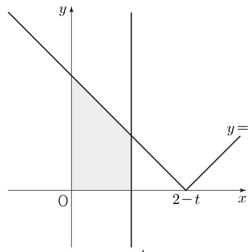
함수 $|f(x)|$의 그래프와 x축이 만나는 점의

x좌표는 $2-t$

(i) $0<t<1$일 때

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는

그림과 같다.



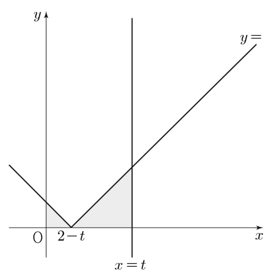
$$g(t) = \int_0^t (-x+2-t)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x - tx\right]_0^t = -\frac{3}{2}t^2 + 2t$$

(ii) $1\le t<2$일 때

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는

그림과 같다.



$$g(t) = \int_0^{2-t}(-x+2-t)dx + \int_{2-t}^t (x-2+t)dx$$

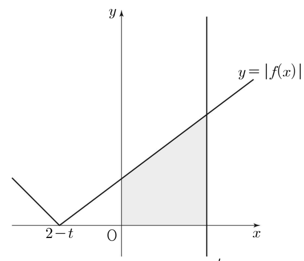
$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x - tx\right]_0^{2-t} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + tx\right]_{2-t}^t$$

$$= \frac{5}{2}t^2 - 6t + 4$$

(iii) $t\ge 2$일 때

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $x=t$는

그림과 같다.



$$g(t) = \int_0^t (x-2+t)dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + tx\right]_0^t = \frac{3}{2}t^2 - 2t$$

(i), (ii), (iii)에 의해

$$\text{함수 } g(t) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}t^2 + 2t & (0<t<1) \\ \dfrac{5}{2}t^2 - 6t + 4 & (1\le t<2) \\ \dfrac{3}{2}t^2 - 2t & (t\ge 2) \end{cases}$$

ㄱ. $g(1) = \displaystyle\int_0^1 |-x+1|dx = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. (i) $t=2$에서 연속

$$\lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t^2 - 6t + 4\right) = \lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t^2 - 2t\right) = 2$$

$g(2) = 2$

(ii) $t=2$에서 미분가능

$$\lim_{t\to 2-}\frac{g(t)-g(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2-}\left(\frac{5}{2}t - 1\right) = 4$$

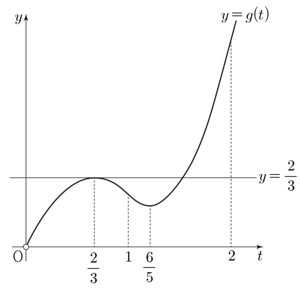
$$\lim_{t\to 2+}\frac{g(t)-g(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2+}\left(\frac{3}{2}t + 1\right) = 4$$

$\therefore$ 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능 (참)

ㄷ. 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(t)$		↗	$\frac{2}{3}$	↘		↘	극소	↗		↗

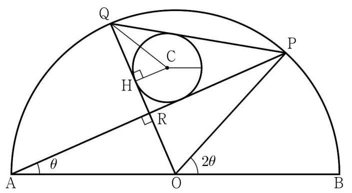


함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2}{3}$에서 극댓값 $\dfrac{2}{3}$를 가지므로

방정식 $g(t) = \dfrac{2}{3}$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



삼각형 ORA에서 $\angle \mathrm{OAR}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{OR}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{QR}}=1-\sin\theta$이고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{AR}}=\cos\theta$

삼각형 OPQ에서 $\angle \mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=1$이므로 $\angle \mathrm{OQP}=\angle \mathrm{OPQ}$이고

$\angle \mathrm{OQP}=\dfrac{1}{2}\left\{\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 QRP의 내접원의 중심을 C라 하고

점 C에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 QHC에서 $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\theta}{4}\right)=\dfrac{f(\theta)}{\overline{\mathrm{QH}}}$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QH}}+\overline{\mathrm{HR}}=\dfrac{f(\theta)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\theta}{4}\right)}+f(\theta)=1-\sin\theta$

$\therefore\ f(\theta)=\dfrac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\theta}{4}\right)}$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\dfrac{\pi}{2}-$일 때, $t\to 0+$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}\times\frac{(1-\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t^2}\times\frac{(1-\cos t)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin^2 t}{t^2}\times\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{4}\right)}\times\frac{1}{1+\cos t}$$

$$=\frac{1}{4}$$

22. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times2^{n+1}-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times2-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}=10$$

23. [출제의도] 정적분의 뜻 이해하기

주어진 식의 양변을 미분하면

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x f(t)dt=\dfrac{d}{dx}(x^3+x-10)$

$f(x)=3x^2+1$

$\therefore\ f(10)=301$

24. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	13	↘	9	↗

함수 $f(x)$는 극솟값 9, 극댓값 13을 가지므로

$a=9$, $b=13$

$\therefore\ ab=117$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na_n-7n+1}{2n-1}$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-7n+1}{2n-1}=0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-7+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=7$

26. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{5x^2}=2$이므로

$f(x)=x^3+10x^2+ax+b$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$의 값이 존재하고 $\displaystyle\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x^3+10x^2+ax+b)=0$

$\therefore\ b=a-9$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+10x^2+ax+a-9}{x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}(x^2+9x+a-9)=-8$

$\therefore\ a=9$, $b=0$

따라서 $f(x)=x^3+10x^2+9x$이고 $f(2)=66$

27. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+2}+7x}{3x^n+2}$

(i) $0<x<1$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $f(x)=\dfrac{7}{2}x$

(ii) $x=1$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(1)=\dfrac{a+7}{5}$

(iii) $x>1$일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+2}+7x}{3x^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^2+\frac{7}{x^{n-1}}}{3+\frac{2}{x^n}}$$

$$=\frac{a}{3}x^2$$

(i), (ii), (iii)에 의해

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}x & (0<x<1)\\ \dfrac{a+7}{5} & (x=1)\\ \dfrac{a}{3}x^2 & (x>1)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{7}{2}x=\lim_{x\to1+}\frac{a}{3}x^2=f(1)$

$\dfrac{7}{2}=\dfrac{a}{3}=\dfrac{a+7}{5}$, $a=\dfrac{21}{2}$

$\therefore\ 20a=210$

28. [출제의도] 지수함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$r(t)=t$이고, 원점 O를 지나는 원 C의 접선의 방정식은 $y=m(t)x$

점 P에서 접선까지의 거리는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로

$t=\dfrac{|t\times m(t)-te^t|}{\sqrt{\{m(t)\}^2+1}}$

$|m(t)-e^t|=\sqrt{\{m(t)\}^2+1}$

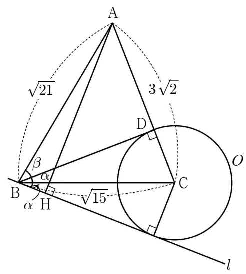
$\{m(t)-e^t\}^2=\{m(t)\}^2+1$

$e^t\times m(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{2}$

$\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{4r(t)-e^t\times m(t)}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0+}\frac{4t-\frac{e^{2t}-1}{2}}{t}=\lim_{t\to0+}\left(4-\frac{e^{2t}-1}{2t}\right)=3$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{DBA}=\beta$라 하고

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 A에서 직선 l까지의 거리는

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{21}\sin(2\alpha+\beta)$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면 $15-x^2=21-(3\sqrt{2}-x)^2$

$x=\sqrt{2}$

$\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\times\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}=\dfrac{2\sqrt{26}}{15}$

$\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)$

$=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\dfrac{2}{15}=\dfrac{11}{15}$

$\sin\beta=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}$

$\sqrt{21}\sin(2\alpha+\beta)$

$=\sqrt{21}\times\left(\dfrac{2\sqrt{26}}{15}\times\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}+\dfrac{11}{15}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}\right)$

$=\dfrac{16}{5}\sqrt{2}$

$\therefore\ p=5$, $q=16$

따라서 $p+q=21$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t\,(t>1)$까지 변할 때의 평균변화율 $g(t)$는 $g(t)=\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}$

함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로

$f(1)=f(2)$이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 함수 $f(x)$는

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)+f(1)$

(단, $k>0$, $\alpha>2$)이고,

함수 $g(t)$는

$g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$이다.

또한, 함수 $g(t)$의 최솟값이 존재하기 위해서는

$\lim_{t\to1+}g(t)\geq g(p)$를 만족시키는 $p(p>2)$가

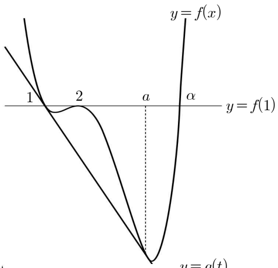
존재해야 한다.

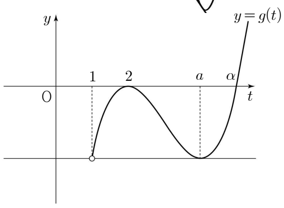
따라서 $\lim_{t\to1+}g(t)=g(p)$를 만족시키는 p를 a라 하면

$p=a$일 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 실근의 합은

최소가 된다. …… ㉠

두 함수 $f(x)$와 $g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





함수 $g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$에 대하여

$$g'(t)=2k(t-2)(t-\alpha)+k(t-2)^2$$
$$=k(t-2)\{3t-(2\alpha+2)\}$$

$g'(t)=0$에서 $t=2,\ \dfrac{2\alpha+2}{3}$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$에서 극소이며

$a=\dfrac{2\alpha+2}{3}$

㉠에 의하여

$$\lim_{t\to1+}g(t)=g\left(\frac{2\alpha+2}{3}\right)$$

$$k(1-\alpha)=k\left(\frac{2\alpha+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2\alpha+2}{3}-\alpha\right)$$

$$27(1-\alpha)=-4(\alpha-2)^3$$

$$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5=0$$

$$(\alpha-5)\left(4\alpha^2-4\alpha+1\right)=0$$

$\therefore\ \alpha=5$ ($\because\ \alpha>2$)

방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합이 최소일 때,

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-5)+f(1)$

따라서 서로 다른 실근의 합의 최솟값은

$1+2+5=8$