

수학 영역(가형)

제 2 교시

1. 함수 $f(x) = \ln x$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

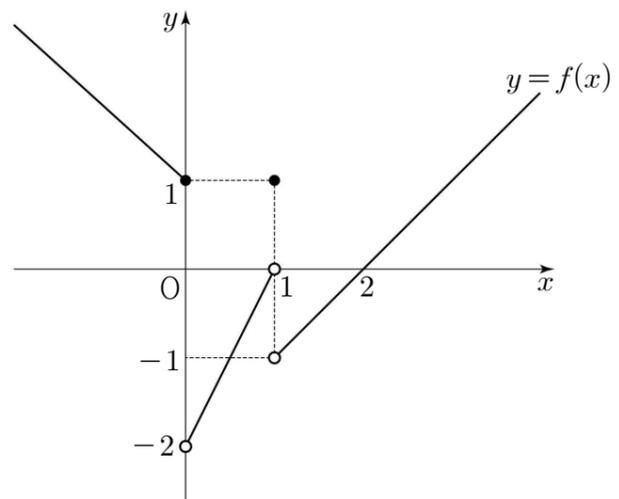
2. $\tan \frac{3}{4}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{2x}}$ 의 값은? [2점]

- ① e ② e^2 ③ e^3 ④ e^4 ⑤ e^5

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$f(0) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $f(x) = \int (3x^2 - 6x)dx$ 에 대하여 $f(0) = 7$ 일 때,
 $f(1)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 곡선 $y = x^3 - 5x$ 위의 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 방정식이
 $y = mx + n$ 일 때, 두 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은? [3점]

- ① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

7. 부등식 $1 + \log_2 x \leq \log_2(x+5)$ 를 만족시키는 모든 정수 x 의
 값의 합은? [3점]

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & (x < 1) \\ x^3 + bx + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f'(1)$ 의 값은?
(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 함수 $f(x) = x \sin x + \cos x$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{h}$ 의
값은? [3점]

- ① 0 ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

10. 함수 $f(x) = 6x^2 + x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \frac{1}{n}$ 의 값은?

[3점]

- ① 9 ② $\frac{19}{2}$ ③ 10 ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 11

11. $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{3}$ 의
모든 해의 합은? [3점]

- ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

12. 닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x + a)$ 의
최솟값이 3일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

13. 방정식 $x^3 + \frac{1}{2}x + k - 3 = 0$ 의 실근이 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 존재하도록 하는 정수 k 의 개수는? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

14. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + x$ 와 직선 $y = x - 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

15. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^4 - 4x - a^2 + a + 9 \geq 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다.

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 내접하는 원 O_1 과 선분 A_1B_1 을 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 그린다.

원 O_1 의 내부와 선분 A_1B_1 을 지름으로 하는 원의 위쪽 반원의 내부의 공통부분인 \ominus 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

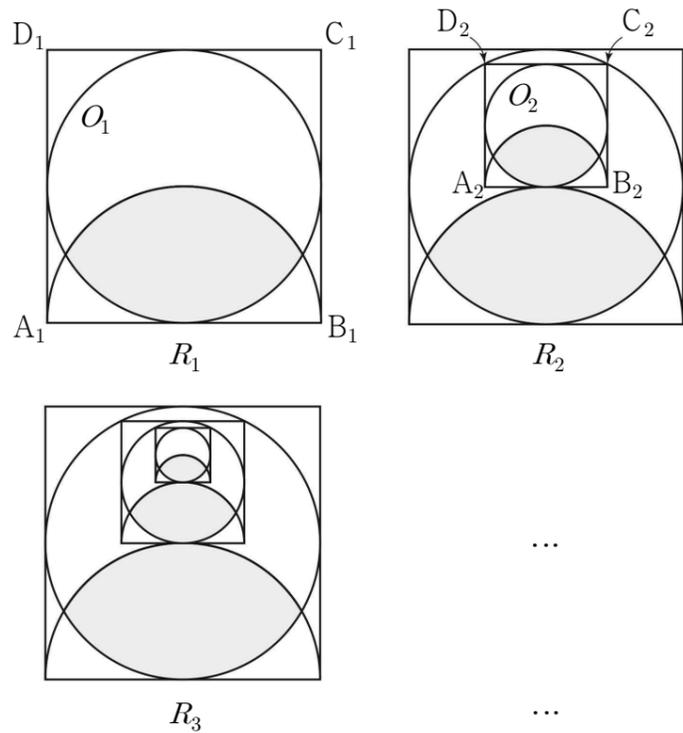
그림 R_1 에서 원 O_1 의 내부의 색칠하지 않은 부분인 \frown 모양의 도형 내부에 원 O_1 의 중심을 지나고 선분 A_1B_1 에 평행한 직선 위의 두 점 A_2, B_2 와 원 O_1 위의 두 점 C_2, D_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린다.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 내접하는 원 O_2 와 선분 A_2B_2 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 그린다.

원 O_2 의 내부와 선분 A_2B_2 를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원의 내부의 공통부분인 \ominus 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에서 원 O_2 의 내부의 색칠하지 않은 부분인 \frown 모양의 도형 내부에 그림 R_1 에서 그림 R_2 를 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \ominus 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{9}{4} \left(\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \right)$ ② $\frac{5}{2} \left(\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \right)$ ③ $\frac{7}{2} \left(\frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \right)$
 ④ $\frac{4}{3} \left(\frac{8}{3} \pi - \sqrt{3} \right)$ ⑤ $\frac{7}{4} \left(\frac{8}{3} \pi - \sqrt{3} \right)$

17. 그림과 같이 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 직선 $y = x$ 가 있다.

직선 $x = a (a > 1)$ 이 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 만나는 점을 A,

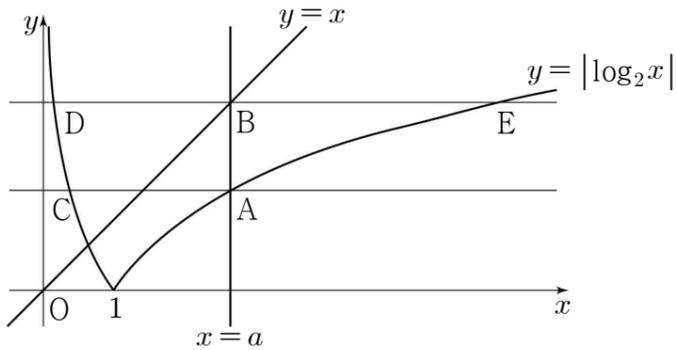
직선 $y = x$ 와 만나는 점을 B라 하자.

점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 만나는

점 중 A가 아닌 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 x 축에 평행한

직선이 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 만나는 두 점을 각각 D, E라 하자.

$\overline{DE} = \frac{15}{4}$ 일 때, 선분 CA의 길이는? [4점]



- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

18. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t, \quad v_2(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$$

이다. 다음은 두 점 P, Q가 출발 후 처음으로 만날 때까지

두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 구하는 과정이다.

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치를 각각 $x_1(t), x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$$x_2(t) = \boxed{\text{(가)}}$$

출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t = 6$ 이다.

$0 < t \leq 6$ 에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $l(t)$ 라 하면

$l(t)$ 는 $t = \boxed{\text{(나)}}$ 일 때 극대이면서 최대이므로

$l(t)$ 의 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(t)$ 라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를

각각 a, b 라 할 때, $\frac{a \times b}{f(2)}$ 의 값은? [4점]

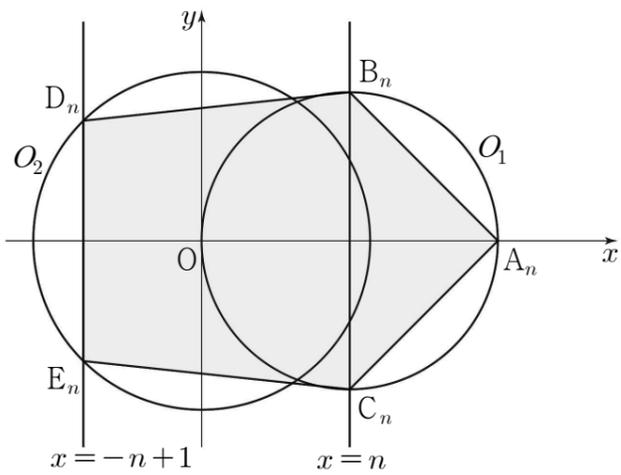
- ① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

19. 그림과 같이 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 두 원

$$O_1 : (x-n)^2 + y^2 = n^2$$

$$O_2 : x^2 + y^2 = 2(n-1)^2$$

과 점 $A_n(2n, 0)$ 이 있다. 원 O_1 과 직선 $x=n$ 이 만나는 두 점을 각각 B_n, C_n , 원 O_2 와 직선 $x=-n+1$ 이 만나는 두 점을 각각 D_n, E_n 이라 하자. 오각형 $A_n B_n D_n E_n C_n$ 의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점들의 개수를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5}n - \sqrt{a_n})$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ⑤ $\sqrt{5}$

20. 함수 $f(x) = -x + 2 - t$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_0^t |f(x)| dx$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $t > 0$) [4점]

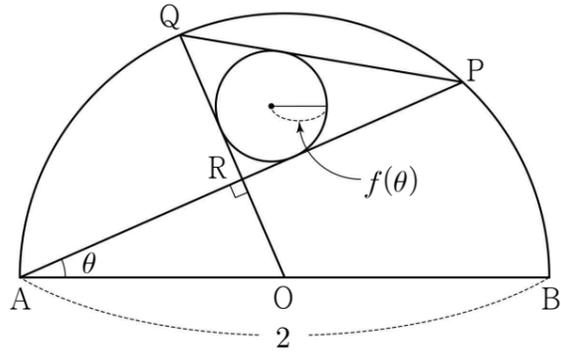
< 보기 >

- ㄱ. $g(1) = \frac{1}{2}$
- ㄴ. 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 미분가능하다.
- ㄷ. 방정식 $g(t) = \frac{2}{3}$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 하고, 점 O를 지나고 선분 AP에 수직인 직선이 호 AP와 만나는 점을 Q, 선분 AP와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 PQR에 내접하는 원의 반지름을 $f(\theta)$ 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

단답형

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 2^{n+1} - 1}{2^n + 1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_2^x f(t) dt = x^3 + x - 10$$

을 만족시킬 때, $f(10)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 9$ 는 극솟값 a 와 극댓값 b 를 갖는다.
두 수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n - 7n + 1}{2n - 1} = 5$$

일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{5x^2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -8$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

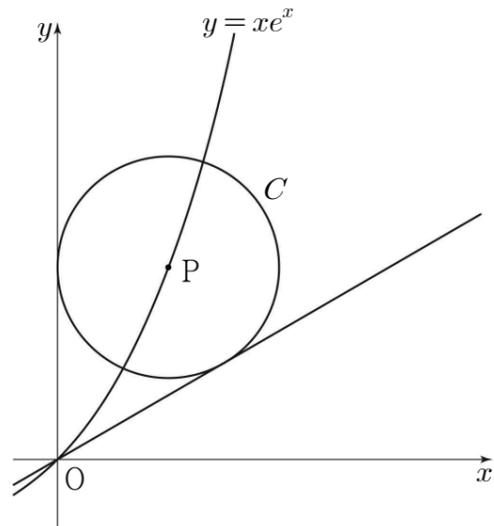
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 7x}{3x^n + 2}$$

가 $x=1$ 에서 연속일 때, $20a$ 의 값을 구하시오.
(단, a 는 상수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 곡선 $y = xe^x$ 위의 점 $P(t, te^t)$ ($t > 0$)을 중심으로 하고 y 축에 접하는 원을 C 라 하자.

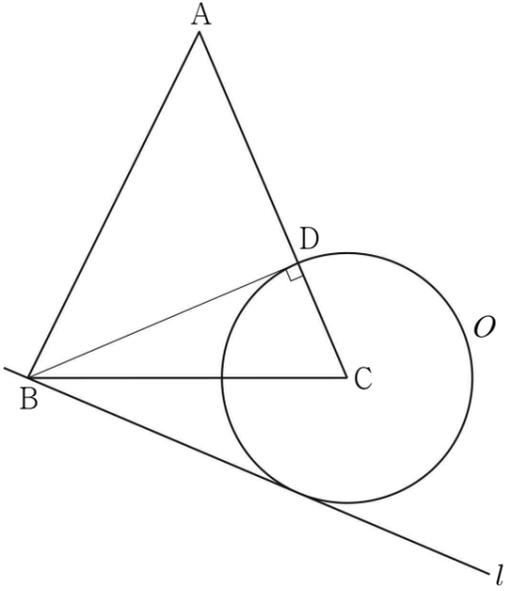
원 C 의 반지름의 길이를 $r(t)$, 원점 O 를 지나고 원 C 에 접하는 직선 중에서 y 축이 아닌 직선의 기울기를 $m(t)$ 라 할 때,

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4r(t) - e^t \times m(t)}{t}$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 세 변의 길이가 $\overline{AB} = \sqrt{21}$, $\overline{BC} = \sqrt{15}$, $\overline{CA} = 3\sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O라 하자. 점 B에서 원 O에 그은 접선 중 점 D를 지나지 않는 접선을 l이라 할 때, 점 A에서 직선 l까지의 거리는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



30. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 $t(t > 1)$ 까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$ 라 정의할 때, 함수 $g(t)$ 는 $t = 2$ 에서 극댓값 0을 갖는다. 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x) = f(1)$ 의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.