2017학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나 형]

1	④	**2**	③	**3**	②	**4**	②	**5**	④
6	⑤	**7**	③	**8**	⑤	**9**	①	**10**	②
11	①	**12**	①	**13**	④	**14**	③	**15**	⑤
16	③	**17**	①	**18**	③	**19**	②	**20**	②
21	④	**22**	8	**23**	5	**24**	220	**25**	16
26	3	**27**	4	**28**	29	**29**	59	**30**	127

1. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2-4x+9)=9$

2. [출제의도] 여집합의 뜻 이해하기

$A^C=\{1,3,5\}$이므로 집합 A^C의 원소의 개수는 3

3. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 1+\log_3 9=0+2=2$

4. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{a}{2}=1$$

따라서 $a=2$

5. [출제의도] 도함수 이해하기

$f'(x)=3x^2+4x+1$이므로 $f'(1)=8$

6. [출제의도] 합성함수 이해하기

$(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(2)=2^2+1=5$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(0)=1,\ \lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$이므로

$f(0)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=0$

8. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=x^3-3x^2+C$(단, C는 적분상수)

$f(0)=C=7$이므로 $f(x)=x^3-3x^2+7$

따라서 $f(1)=5$

9. [출제의도] 유리함수의 그래프 이해하기

직선 $x=2$가 한 점근선이므로 $a=2$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{x+b}{x-2}$

유리함수 $f(x)$의 그래프가 점 $(3,7)$을 지나므로

$7=\dfrac{3+b}{3-2}$

$\therefore\ b=4$

따라서 $a+b=6$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프 이해하기

무리함수 $y=f(x)$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{x+2}-1$

따라서 $f(7)=2$

11. [출제의도] 지수의 성질 이해하기

$\sqrt[3n]{8^4}=8^{\frac{4}{3n}}=2^{\frac{12}{3n}}=2^{\frac{4}{n}}$이 자연수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 7

12. [출제의도] 수학적 귀납법으로 추론하기

$a_2=\dfrac{5}{1}\times a_1=5$

$a_3=\dfrac{6}{3}\times a_2=10$

$a_4=\dfrac{7}{5}\times a_3=14$

$a_5=\dfrac{8}{7}\times a_4=16$

따라서 $a_5=16$

13. [출제의도] 등비급수의 성질 이해하기

등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$은 $-1<\dfrac{x-3}{2}<1$일 때 수렴하므로 $1<x<5$

$1<x<5$를 만족시키는 정수 x는

$x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 9

14. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=1$

$f'(x)=2x-a$이므로 $f'(2)=4-a=1$

따라서 $a=3$

15. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 x가

$x=t^3-9t^2+8t=t(t-1)(t-8)$이므로

$t=1$에서 처음으로 원점을 지난다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-18t+8$이므로

$t=1$에서의 속도는 -7

16. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=a-8$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=4(a-8)$

$f(1)g(1)=4(a-8)$에서

$a-8=4(a-8)$

따라서 $a=8$

17. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f'(x)=3x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌 구간 $[1,4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	4	↗	24

따라서 닫힌 구간 $[1,4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 4, $x=4$에서 최댓값 24를 갖는다.

$\therefore\ M=24,\ m=4$

따라서 $M+m=28$

18. [출제의도] 수열의 성질 추론하기

ㄱ. $a,\ x,\ y,\ z,\ b$는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a,\ y,\ b$도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore\ a+b=2y$ (참)

ㄴ. [반례] $a=1,\ p=\sqrt{2},\ q=2,\ r=2\sqrt{2},\ b=4$ 일 때, $aprb=16,\ q^3=8$이므로 $aprb\neq q^3$ (거짓)

ㄷ. $x+z=2y=a+b,\ pr=q^2=ab$이므로

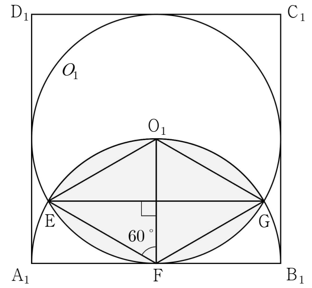
$(x+z)^2-4pr=(a+b)^2-4ab$

$=(a-b)^2\geq 0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기

그림 R_1에서



원 O_1의 중심 O_1과 세 점 E, F, G가 있다.

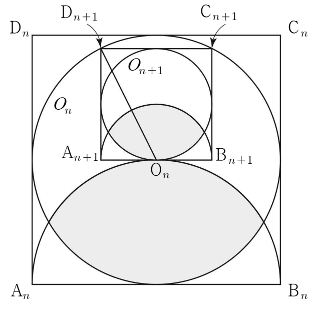
두 삼각형 O_1EF, O_1FG는 정삼각형이다.

S_1은 점 F를 중심으로 하는 부채꼴 FGE의 넓이에서 삼각형 FGE의 넓이를 뺀 값의 두 배이므로

$S_1=2\left\{\left(2^2\times\pi\times\dfrac{120°}{360°}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}\right)\right\}$

$=\dfrac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부에 선분 $D_{n+1}O_n$을 그린 그림이다.



$\overline{A_nD_n}=a(a\neq 0)$이라 하면 $\overline{D_{n+1}O_n}=\dfrac{a}{2}$이고,

삼각형 $A_{n+1}O_nD_{n+1}$이 직각삼각형이므로

$\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$과

정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$은 서로 닮음이고

$\overline{A_nD_n}:\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=a:\dfrac{a}{\sqrt{5}}=1:\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

따라서 그림 R_n과 R_{n+1}에서 새로 얻어진

모양의 도형도 서로 닮음이고

닮음비가 $1:\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{1}{5}$이다.

S_n은 첫째항이 $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{5}}$$
$$= \frac{5}{4}\left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{5}{2}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$$

20. [출제의도] 집합의 성질을 활용하여 추론하기

$S(X)$의 값이 최대, $S(Y)$의 값이 최소일 때, $S(X)-S(Y)$는 최댓값을 갖는다.
집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어떨어지지 않으려면 $k\in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.
11, 12, 13, $\cdots$, 21은 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면
집합 X는 11, 12, 13, $\cdots$, 21을 원소로 가져야 한다.
이때 1, 3, 7은 21의 약수이고,
2, 4, 5, 10은 20의 약수,
6, 9는 18의 약수,
8은 16의 약수이므로
1, 2, $\cdots$, 10은 집합 X의 원소가 될 수 없다.
또한 $n(X\cup Y)=17$, $n(X\cap Y)=1$이므로 $S(Y)$가 최솟값을 가지려면 집합 Y는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11을 원소로 가져야 한다.
따라서 $X=\{11, 12, 13, \cdots, 20, 21\}$,
$Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$일 때
$S(X)-S(Y)$는 최댓값 144를 갖는다.

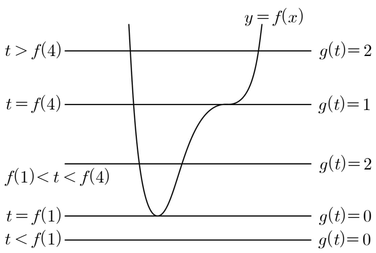
21. [출제의도] 도함수를 활용하여 그래프 추론하기

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이다.
(가)에서 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 1, 4뿐이므로
$f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$이거나
$f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$이다.

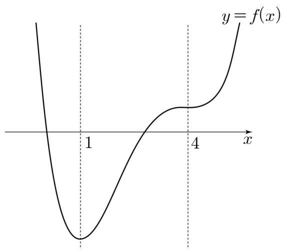
(i) $f'(x)=4(x-1)(x-4)^2$일 때
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	$f(4)$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(1)$, $t=f(4)$에서 불연속이므로
(나)에 의하여 $f(1)=-25$, $f(4)=2$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

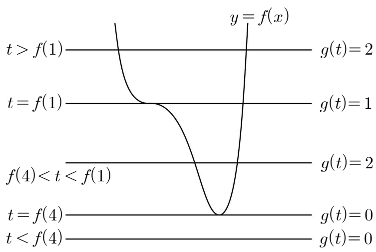


이때 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 모두 4보다 작으므로 (다)를 만족시키지 못한다.

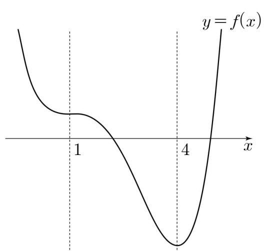
(ii) $f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$일 때
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(1)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형과 실수 t에 대한 함수 $g(t)$의 값은 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 $t=f(4)$, $t=f(1)$에서 불연속이므로
(나)에 의하여 $f(1)=2$, $f(4)=-25$이다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 4보다 큰 실근을 갖는다.
(i), (ii)에 의하여
$f'(x)=4(x-1)^2(x-4)$
$=4x^3-24x^2+36x-16$
$\therefore\ a=-8$, $b=18$, $c=-16$
또한 $f(1)=2$이므로 $d=7$
따라서 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2-16x+7$이므로
$f(-1)=50$

22. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{\frac{1}{2}}\times 4^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{2}} = 2^3 = 8$

23. [출제의도] 역함수의 성질 이해하기

$f^{-1}(8)=a$라 하면
$f(a)=8$
$3a-7=8$
$\therefore\ a=5$
따라서 $f^{-1}(8)=5$

24. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}4k$$
$$=4\times\frac{10\times 11}{2}=220$$

25. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로
$f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(x+k)=2+k$
$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+4x+6)=18$
$2+k=18$
따라서 $k=16$

26. [출제의도] 진리집합의 포함관계 추론하기

조건 p의 진리집합을 P라 하면
$P=\{x\,|\,-2n<x<2n\}$
조건 q의 진리집합을 Q라 하면
$Q=\{1, 5\}$
p가 q이기 위한 필요조건이 되려면
$Q\subset P$이어야 하므로 $n>\frac{5}{2}$
따라서 자연수 n의 최솟값은 3

27. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-2\right)$가 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-2\right)=0$
$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5a_n}{n^2+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5a_n}{n^2}}{1+\frac{a_n}{n^2}}=\frac{2+5\times 2}{1+2}=4$$

28. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

이차방정식 $x^2-2\sqrt{a_n}\,x+a_{n+1}-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D=4a_n-4(a_{n+1}-3)=0$
$\therefore\ a_{n+1}-a_n=3$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열이므로 $a_{10}=2+9\times 3=29$

29. [출제의도] 도함수를 활용하여 그래프 추론하기

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로
a는 양수이다. $f'(x)=ax^2-2bx-(a-4)$이므로
방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$D=4b^2+\boxed{4a^2-16a}\le 0$ ……㉠
방정식 $f(x)+g(x)=0$이 서로 다른 2개의 실근을 가지므로
$f(x)+g(x)=\frac{1}{3}ax^3+ax^2-3ax-3a^2=0$이고
$a>0$에서 $x^3+3x^2-9x-9a=0$
따라서 방정식 $x^3+3x^2-9x=\boxed{9a}$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
$h(x)=x^3+3x^2-9x$라 하자.
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

방정식 $x^3+3x^2-9x=9a$가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 $9a=27$ 또는 $9a=-5$이어야 하고 $a>0$이므로 $a=\boxed{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $b^2 \le 3$이므로 $-\sqrt{3} \le b \le \sqrt{3}$

$\therefore\ F(a)=4a^2-16a,\ G(a)=9a,\ k=3$

따라서 $F(5)+G(4)+k=59$

30. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

집합 A_m에서

$\log_2 a+\log_4 b=\log_4 a^2b$가 100 이하의 자연수이므로

$\log_4 a^2b=\alpha\,(1 \le \alpha \le 100,\ \alpha$는 자연수)라 하면

$a^2b=4^\alpha$이다.

따라서 $a^2b=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$이어야 한다.

$a=1$일 때

$b=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100}$

따라서 $m=1$일 때 $a=1$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}$

$\therefore\ A_1=\{4^1, 4^2, 4^3, \cdots, 4^{100}\}$

$\therefore\ n(A_1)=100$

$a=2$일 때

$b=4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{99}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99}$

따라서 $m=2$일 때 $a=1,\ a=2$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},$

$\quad 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99}$

$\therefore\ A_2=\{4^1, 4^2, \cdots, 4^{100}, 2\times4^0, \cdots, 2\times4^{99}\}$

$\therefore\ n(A_2)=200$

$a=3$일 때

$b=\dfrac{4^1}{9},\ \dfrac{4^2}{9},\ \dfrac{4^3}{9},\ \cdots,\ \dfrac{4^{100}}{9}$이므로

$b=2^k$(k는 정수)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a=3$일 때 조건을 만족하는 ab는 존재하지 않는다.

따라서 $m=3$일 때 $a=1,\ a=2,\ a=3$이므로

집합 A_3의 원소의 개수는 집합 A_2의 원소의 개수와 같다.

$\therefore\ n(A_3)=200$

$a=4$일 때

$b=4^{-1},\ 4^0,\ 4^1,\ \cdots,\ 4^{98}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{99}$

따라서 $m=4$일 때

$a=1,\ a=2,\ a=3,\ a=4$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},$

$\quad 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$

$\quad 4^0$

$\therefore\ A_4=\{4^0, 4^1, \cdots, 4^{100}, 2\times4^0, \cdots, 2\times4^{99}\}$

$\therefore\ n(A_4)=201$

$a=5,\ a=6,\ a=7$일 때

$b=2^k$(k는 정수)를 만족시키지 못한다.

이와 같이 $a\neq2^\beta$(β는 자연수)일 때

$b=2^k$(k는 정수)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a=5,\ a=6,\ a=7$일 때 조건을 만족하는 ab는 존재하지 않으므로 $m=5,\ m=6,\ m=7$일 때의 집합 A_m의 원소의 개수는 집합 A_4의 원소의 개수와 같다.

$\therefore\ n(A_m)=201\,(m=5,\ 6,\ 7)$

$a=8$일 때

$b=4^{-2},\ 4^{-1},\ 4^0,\ \cdots,\ 4^{97}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^{-1},\ 2\times4^0,\ \cdots,\ 2\times4^{98}$

따라서 $m=8$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=8$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},$

$\quad 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$

$\quad 4^0,\ 2\times4^{-1}$

$\therefore\ A_8=\{4^0, \cdots, 4^{100}, 2\times4^{-1}, 2\times4^0, \cdots, 2\times4^{99}\}$

$\therefore\ n(A_8)=202$

$\cdots$

$a=64$일 때

$b=4^{-5},\ 4^{-4},\ 4^{-3},\ \cdots,\ 4^{94}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^{-2},\ 4^{-1},\ \cdots,\ 4^{97}$

따라서 $m=64$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=64$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},$

$\quad 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$

$\quad 4^0,\ 2\times4^{-1},\ 4^{-1},\ 2\times4^{-2},\ 4^{-2}$

$\therefore A_{64}=\{4^{-2},4^{-1},\cdots,4^{100},2\times4^{-2},2\times4^{-1},\cdots,2\times4^{99}\}$

$\therefore\ n(A_{64})=205$

$\cdots$

$a=128$일 때

$b=4^{-6},\ 4^{-5},\ 4^{-4},\ \cdots,\ 4^{93}$이므로 $b=2^k$(k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^{-3},\ 2\times4^{-2},\ \cdots,\ 2\times4^{96}$

따라서 $m=128$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=128$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},$

$\quad 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$

$\quad 4^0,\ 2\times4^{-1},\ 4^{-1},\ 2\times4^{-2},\ 4^{-2},\ 2\times4^{-3}$

$\therefore\ A_{128}=\{4^{-2},\cdots,4^{100},2\times4^{-3},2\times4^{-2},\cdots,2\times4^{99}\}$

$\therefore\ n(A_{128})=206$

$\cdots$

이와 같이 임의의 두 자연수 $p,\ q\,(p<q)$에 대하여 $n(A_p)\le n(A_q)$가 성립한다.

따라서 $n(A_m)=205$가 되도록 하는 자연수 m의 최댓값은 127