수학 영역(가형)

1. $\sin\frac{3}{2}\pi$의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

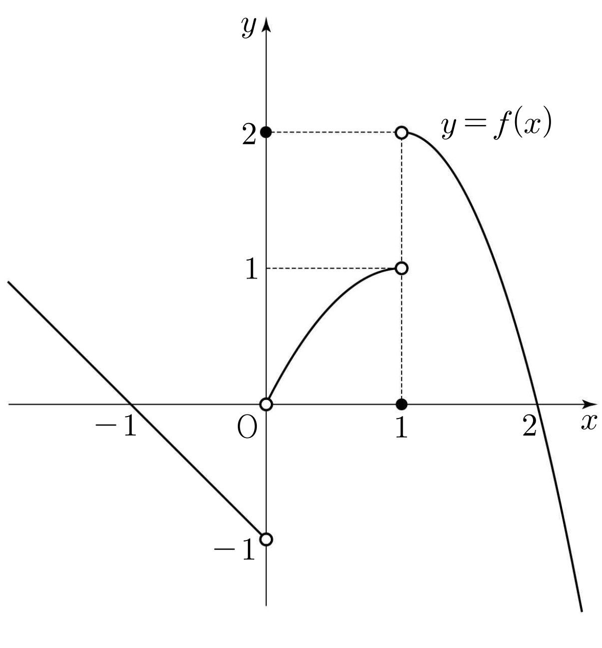
2. 함수 $f(x)=e^{x}+x$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{4x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 곡선 $y=-2x^3+5x$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

6. 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{3^{n+1}+2a_n}=\frac{2}{5}$$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은? [3점]

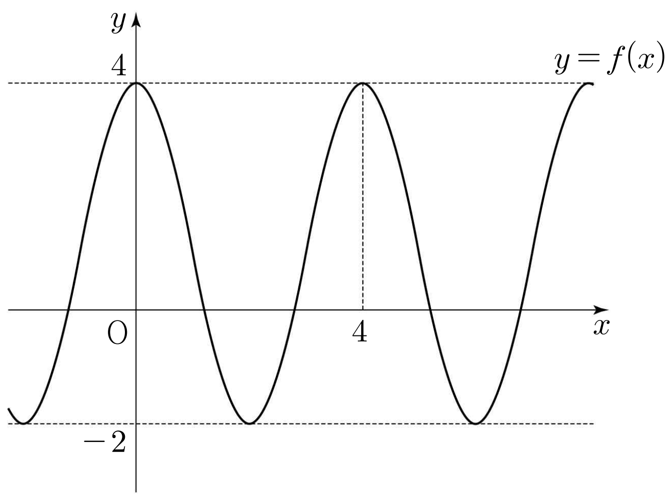
① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

7. $\int_{-1}^{1}\left(4x^3+x^2-\frac{1}{2}x+a\right)dx=2$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

8. 그림은 함수 $f(x)=a\cos\dfrac{\pi}{2b}x+1$의 그래프이다.

두 양수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]



① $\dfrac{7}{2}$ ② 4 ③ $\dfrac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\dfrac{11}{2}$

9. 부등식 $2-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<\log_2(3x+4)$를 만족시키는

정수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

10. 다항함수 $f(x)$가

$$\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}dx=\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx$$

를 만족시킨다. $f(1)=3$일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+b & (x<2) \\ 4x^2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

12. 함수 $f(x)=3x^2-4x+6$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

13. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1 = 1$이고

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{9}{5}$ ⑤ 2

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - 2t - 3$$

이다. $t = 0$부터 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① $\frac{26}{3}$ ② $\frac{28}{3}$ ③ 10 ④ $\frac{32}{3}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

15. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, 1)$, $\mathrm{B}(27, b)$가 있다. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 그래프가 두 점 A, B의 중점을 지날 때, 상수 m의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

16. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식

$$2\cos^2 x+(2+\sqrt{3})\sin x-(2+\sqrt{3})=0$$

의 모든 해의 합은? [4점]

① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{5}{4}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{7}{4}\pi$

17. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$를 갖는다.

$$S=\int_{\alpha}^{0}|f'(x)|dx,\ T=\int_{0}^{\beta}|f'(x)|dx$$

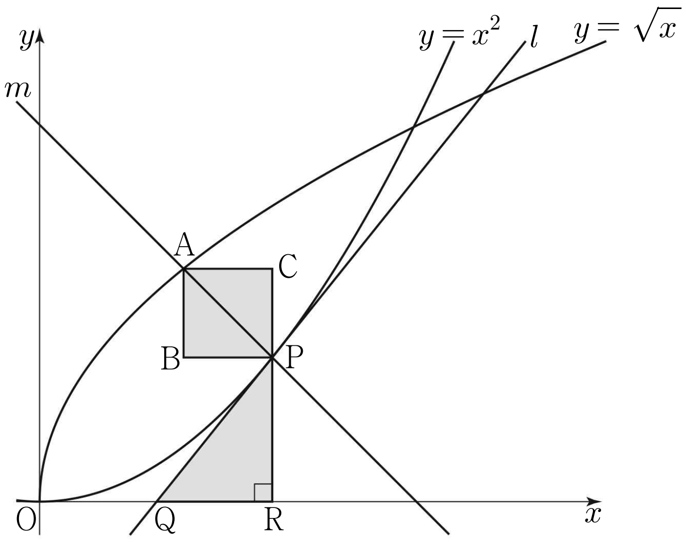
라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $\alpha+\beta=0$이면 $S=T$이다.
ㄷ. $S<T$이고 $f(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$의 양의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)(0<t<1)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하자.
또한, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선 m이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A라 할 때, 선분 PA를 대각선으로 하는 정사각형 PCAB의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{t\times g(t)}{f(t)}$의 값은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

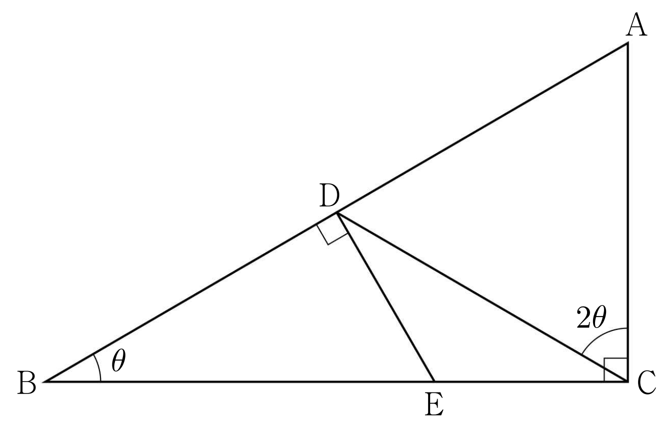
19. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=2kx^3-3(3k+1)x^2+18x-2$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 최댓값 12를 가질 때, k의 값을 구하는 과정이다.

> 함수 $f(x)$에서
> $f'(x)=6kx^2-6(3k+1)x+18=6(kx-1)(x-3)$
> $k=$ (가) 인 경우를 제외하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로
>
> (i) $0<k\le$ (가) 일 때,
> $0<x<3$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
> 따라서 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 (나) 이다. 그러나 (나) $=12$를 만족하는 k의 값은 $0<k\le$ (가) 에 존재하지 않는다.
>
> (ii) $k>$ (가) 일 때,
> 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.
>
> | x | 0 | $\cdots$ | $\frac{1}{k}$ | $\cdots$ | 3 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f'(x)$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
> | $f(x)$ | | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | |
>
> 따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{k}$에서 극대이면서 최대이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 최댓값 12를 가질 때, $k=$ (다) 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 하고, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\frac{g(a)}{b}$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CBA}=\theta$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위에 $\angle\mathrm{ACD}=2\theta$가 되도록 점 D를 잡고, 선분 BC 위에 $\angle\mathrm{BDE}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 점 E를 잡는다. 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

21. 삼차함수 $f(x)=4x^3-24x^2+36x-8k$(k는 정수)에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt & (x \le a \text{ 또는 } x \ge b) \\ c & (a < x < b) \end{cases}$$

라 하자. 어떤 정수 k에 대하여 함수 $g(x)$가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않도록 세 실수 a, b, c를 정할 때, $k+a+b+c$의 최솟값은? [4점]

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

단답형

22. 함수 $f(x)=\int (2x+1)dx$ 에 대하여 $f(0)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 닫힌 구간 $[1, 5]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$의 최댓값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4}-9\right)=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $f(x)=\cos x-3\sin x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+3h)-f(\pi)}{h}$의

값을 구하시오. [3점]

26. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$f(1)=2$, $f'(1)=3$, $g(1)=5$, $g'(1)=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)g\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)g(1)\right\}$의 값을 구하시오. [4점]

27. 자연수 n에 대하여 점 $(4n, 3n)$을 중심으로 하고, x축에 접하는 원 C_n이 있다. 원 C_n 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

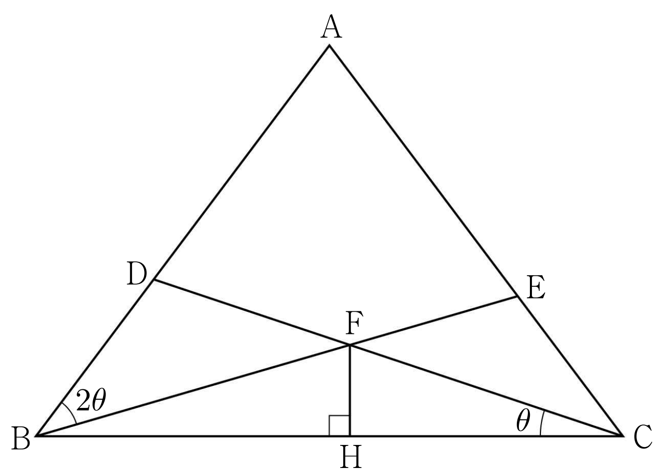
28. 실수 t에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3kx+2 & (x<0) \\ x^2+\frac{4}{3k}x-2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

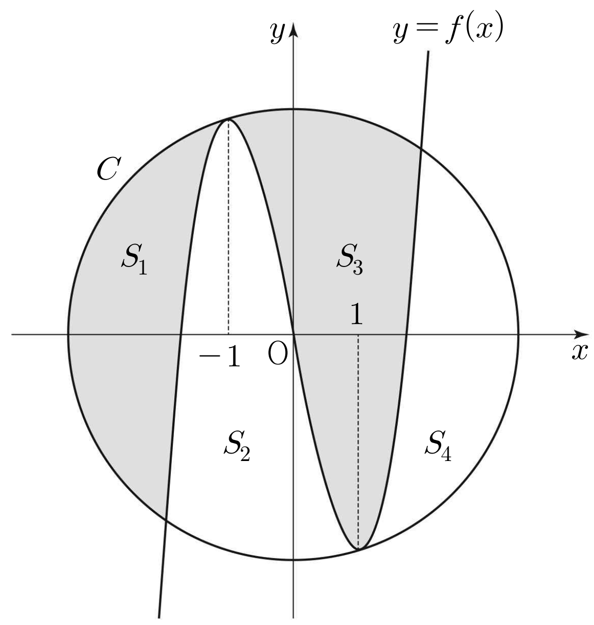
$$g(x)=2x+t$$

의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2가 되도록 양수 k를 정할 때, $150k$의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=12$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위에 $\angle\mathrm{DCB}=\theta$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이 되도록 점 D를 잡고, 선분 AC 위에 $\angle\mathrm{EBA}=2\theta$가 되도록 점 E를 잡는다. 선분 BE와 선분 CD가 만나는 점을 F, 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 FH의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 3보다 큰 자연수 n에 대하여 원 $C: x^2+y^2=n$이 있다. 삼차함수 $y=f(x)$가 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이고, 두 점 $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$이 모두 원 C 위에 있을 때, 그림과 같이 원 C의 내부는 곡선 $y=f(x)$에 의해 4개의 영역 S_1, S_2, S_3, S_4로 나누어진다. 각 영역 $S_k(k=1, 2, 3, 4)$의 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $g_k(n)$이라 할 때, $g_1(n)>g_3(n)$을 만족시키는 n의 최솟값은 a이다. $a+\{g_1(a)\times g_3(a)\}$의 값을 구하시오.
(단, 각 영역은 경계선을 포함하지 않는다.) [4점]



※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.