2020학년도 대학수학능력시험 대비

2019학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

가형 정답

1	④	2	③	3	②	4	⑤	5	④
6	③	7	③	8	①	9	①	10	④
11	②	12	①	13	④	14	⑤	15	⑤
16	⑤	17	②	18	①	19	②	20	③
21	②	22	3	23	60	24	13	25	21
26	9	27	54	28	340	29	40	30	77

해 설

1. [출제의도] 순열의 수를 계산한다.

${}_6\mathrm{P}_2=6\times5=30$

2. [출제의도] 삼각함수의 값을 계산한다.

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ 이므로

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}$

3. [출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5x}{3x}\right)$$
$$=\frac{5}{3}$$

4. [출제의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$

함수 $f(x)=\dfrac{x}{2}+\sin x$ 에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2}+\cos x$

따라서 $f'(\pi)=\dfrac{1}{2}+\cos\pi=-\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $y=\ln(x-a)+b$ 의 그래프가 점 $(2,5)$ 를 지나므로

$\ln(2-a)+b=5$ ...... ㉠

함수 $y=\ln(x-a)+b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=a$ 이므로

$a=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=1,\ b=5$

따라서 $a+b=1+5=6$

6. [출제의도] 치환적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ 에서

$t=x^2+1$ 로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=2x$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$$

7. [출제의도] 로그함수의 미분법을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$ 에서 $x\to0$ 일 때 (분모)$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 연속함수이므로

$f(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$

$f(0)=\ln b=0$ 에서

$b=1$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

함수 $f(x)=\ln(ax+1)$ 에서

$f'(x)=\dfrac{a}{ax+1}$

$f'(0)=a$ 이므로

$a=2$

따라서 $f(x)=\ln(2x+1)$ 이므로

$f(2)=\ln5$

8. [출제의도] 도함수를 이용하여 접선의 방정식과 도형의 넓이를 구한다.

함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 에서

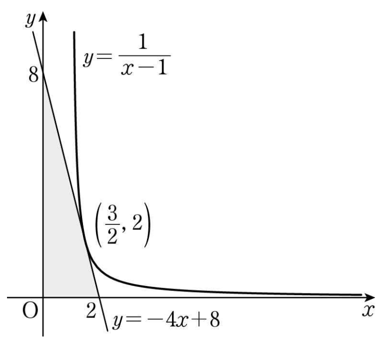
$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

점 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 에서의 접선의 기울기가 -4 이므로 접선의 방정식은

$y=-4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+2$

$y=-4x+8$

곡선 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 위의 점 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분은 그림과 같이 밑변의 길이가 2이고 높이가 8인 직각삼각형이다.



따라서 구하는 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times8=8$

9. [출제의도] 원순열의 성질을 이해하여 순열의 수를 구한다.

1학년 학생 2명이 이웃하도록 앉아야 하므로 1학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하면 나머지 학생 3명과 함께 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!=2$ 이므로

구하는 경우의 수는

$6\times2=12$

10. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그를 포함한 부등식의 해를 구한다.

$\log_2(x^2-1)+\log_2 3\le5$ 에서

로그의 진수 조건에 의하여

$x^2-1>0$ ...... ㉠

$\log_2(x^2-1)+\log_2 3\le5$ 에서

$\log_2(x^2-1)\le\log_2\dfrac{32}{3}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$x^2-1\le\dfrac{32}{3}$

$x^2\le\dfrac{35}{3}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$-3,\ -2,\ 2,\ 3$ 의 4이다.

11. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 극솟값을 구한다.

$f(x)=\tan(\pi x^2+ax)$ 에서

$f'(x)=(2\pi x+a)\sec^2(\pi x^2+ax)$

$x=\dfrac{1}{2}$ 에서 극솟값을 가지므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=(\pi+a)\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2}\right)=0$

$\sec^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{a}{2}\right)\ne0$ 이므로 $a=-\pi$

따라서 $f(x)=\tan(\pi x^2-\pi x)$ 에서 극솟값 k 는

$$k=f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

12. [출제의도] 정적분의 정의와 치환적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$x_k=\dfrac{k\pi}{n}$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{n}$ 라 하면 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$
$$=\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\sin(3x)\,dx$$

$t=3x$ 로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\pi$ 일 때 $t=3\pi$ 이므로

$$\int_0^{\pi}\sin(3x)\,dx=\int_0^{3\pi}\frac{1}{3}\sin t\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}\cos t\right]_0^{3\pi}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}\cos3\pi\right)-\left(-\frac{1}{3}\cos0\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

13. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값의 합을 구한다.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\cos x\tan x+a)$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\sin x+a)$$
$$=2+a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에서 연속이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)$

$3a=2+a,\ a=1$

$0\le x\le\pi$ 에서 함수 $f(x)=2\sin x+1$ 이고

$0\le\sin x\le1$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.

따라서 구하는 값은

$3+1=4$

14. [출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

$g(4)=k$ 라 하면 $f(k)=4$

$k^3-5k^2+9k-5=4$

$k^3-5k^2+9k-9=0$

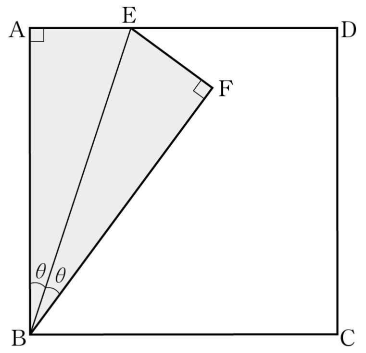
$(k-3)(k^2-2k+3)=0$

k 는 실수이므로 $k=3$

$f(x)=x^3-5x^2+9x-5$ 에서

$f'(x)=3x^2-10x+9$
이므로 $f'(3)=6$
따라서 역함수의 미분법에 의하여
$g'(4)=\dfrac{1}{f'(g(4))}=\dfrac{1}{f'(3)}=\dfrac{1}{6}$

15. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.



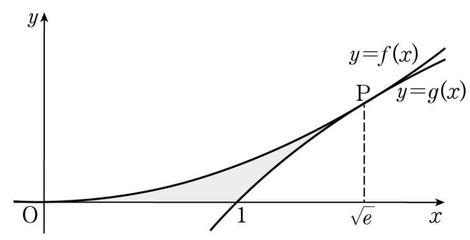
두 삼각형 ABE, FBE는 서로 합동이고
사각형 ABCD가 정사각형이므로
$\angle A=\angle F=\dfrac{\pi}{2}$
조건 (나)에서 사각형 ABFE의 넓이는 $\dfrac{1}{3}$ 이고,
조건 (가)에서 두 삼각형 ABE, FBE의 넓이가 같으므로 삼각형 ABE의 넓이는 $\dfrac{1}{6}$ 이다.
$\angle ABE=\theta$라 하면 삼각형 ABE의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AE}=\dfrac{1}{2}\times1\times\tan\theta$ 이므로
$\dfrac{1}{2}\tan\theta=\dfrac{1}{6}$
$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$
$\angle FBE=\theta$ 이므로 $\angle ABF=2\theta$
따라서
$$\begin{aligned}\tan(\angle ABF)&=\tan2\theta\\&=\tan(\theta+\theta)\\&=\frac{\tan\theta+\tan\theta}{1-\tan\theta\times\tan\theta}\\&=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

16. [출제의도] 조합을 이용하여 집합의 순서쌍의 개수를 구한다.

전체집합 U의 원소 5개 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 3개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2}=10$ …… ㉠
집합 $A\cup B$의 원소 3개 중에서 집합 $A\cap B$의 원소 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$ …… ㉡
집합 $A\cup B$의 원소 3개 중에서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 2개의 원소는 각각 집합 $A-B$와 집합 $B-A$ 중 반드시 한 집합에만 속하므로 그 경우의 수는
$2^2=4$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는
$10\times3\times4=120$

17. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(x)=ax^2$, $g(x)=\ln x$에서
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 P의 x좌표를 k라 하면
$ak^2=\ln k$ …… ㉠
$f'(x)=2ax$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$
두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로
$2ak=\dfrac{1}{k}$
$2ak^2=1$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$\ln k=\dfrac{1}{2}$, $k=\sqrt{e}$
$a=\dfrac{1}{2e}$
$f(x)=\dfrac{x^2}{2e}$ 이고 점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$이므로
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}\ln x\,dx\\&=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left\{\left[x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\left(x\times\frac{1}{x}\right)dx\right\}\\&=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\ln x\right]_1^{\sqrt{e}}+\left[x\right]_1^{\sqrt{e}}\\&=\left(\frac{\sqrt{e}}{6}-0\right)-\left(\frac{\sqrt{e}}{2}-0\right)+\left(\sqrt{e}-1\right)\\&=\frac{2\sqrt{e}-3}{3}\end{aligned}$$

18. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 추론한다.

네 상자 A, B, C, D에 n개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 $20-n$개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다.

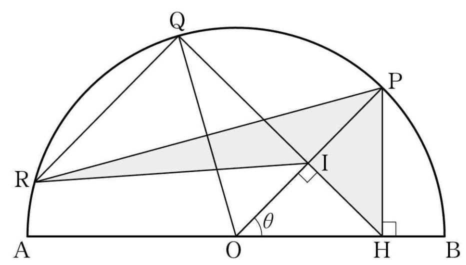
(ⅰ) $n=15$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 5개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_5$와 같으므로
$$\begin{aligned}f(15)&={}_4H_5={}_8C_3\\&=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\boxed{56}\end{aligned}$$

(ⅱ) $n=14$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 6개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 6개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_6$에서 서로 다른 네 상자 중 한 상자만 6번 택하는 경우의 수 4를 뺀 수와 같으므로
$$\begin{aligned}f(14)&={}_4H_6-\boxed{4}\\&={}_9C_3-4\\&=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}-4=80\end{aligned}$$

(ⅲ) $n=13$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A, B, C, D에서 총 7개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 네 상자에서 7개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4H_7$에서 서로 다른 네 상자 중 한 상자만 7번 택하는 경우의 수 4와 서로 다른 네 상자 중 서로 다른 두 상자를 각각 1번, 6번 택하는 경우의 수 ${}_4P_2$를 뺀 수와 같으므로
$$\begin{aligned}f(13)&={}_4H_7-4-{}_4P_2\\&={}_{10}C_3-4-12\\&=120-16=\boxed{104}\end{aligned}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$f(15)+f(14)+f(13)$
$=\boxed{56}+\left({}_4H_6-\boxed{4}\right)+\boxed{104}=240$
따라서 $p=56$, $q=4$, $r=104$이므로
$p+q+r=164$

19. [출제의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결한다.



$\angle OHP=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로
$\overline{OH}=\overline{OP}\cos\theta=\cos\theta$
$\angle HIO=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로
$\overline{OI}=\overline{OH}\cos\theta=\cos^2\theta$
$\overline{IH}=\overline{OH}\sin\theta=\cos\theta\sin\theta$
$$\begin{aligned}\overline{IP}&=\overline{OP}-\overline{OI}\\&=1-\cos^2\theta\\&=\sin^2\theta\end{aligned}$$
삼각형 IHP의 넓이 $T(\theta)$는
$$\begin{aligned}T(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{IH}\times\overline{IP}\\&=\frac{1}{2}\times(\cos\theta\sin\theta)\times\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta\end{aligned}$$
직선 OP와 직선 RQ가 평행이므로 삼각형 RIP의 높이는 $\overline{QI}$이다.
$\overline{OQ}=1$, $\angle OIQ=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 OIQ에서
$\overline{QI}^2=\overline{OQ}^2-\overline{OI}^2$
$$\begin{aligned}\overline{QI}&=\sqrt{1-(\cos^2\theta)^2}\\&=\sqrt{(1-\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}\\&=\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$
삼각형 RIP의 넓이 $S(\theta)$는
$$\begin{aligned}S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{IP}\times\overline{QI}\\&=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\left(\sin\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\right)\\&=\frac{1}{2}\sin^3\theta\sqrt{1+\cos^2\theta}\end{aligned}$$
$S(\theta)-T(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)$
따라서
$$\begin{aligned}&\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{2}\sin^3\theta\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)}{\theta^3}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\times\left(\sqrt{1+\cos^2\theta}-\cos\theta\right)\right\}\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\end{aligned}$$

20. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한다.

$g(x)=\sin(x^2+ax+b)$이므로
$g'(x)=(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$
조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여
$(-2x+a)\cos(x^2-ax+b)=-(2x+a)\cos(x^2+ax+b)$
$x=0$을 대입하면
$a\cos b=0$
$0<b<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $\cos b\neq0$이므로

$a=0$
$g(x)=\sin(x^2+b)$
$g'(x)=2x\cos(x^2+b)$
$g''(x)=2\cos(x^2+b)-4x^2\sin(x^2+b)$
조건 (나)에서 점 $(k,\ g(k))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이므로
$g''(k)=0$
$2\cos(k^2+b)-4k^2\sin(k^2+b)=0$ …… ㉠
$k=0$이면 $0<b<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos b\neq 0$이므로 ㉠이 성립하지 않고, $\cos(k^2+b)=0$이면 ㉠에서 $\sin(k^2+b)=0$이므로 $\sin^2(k^2+b)+\cos^2(k^2+b)=1$이 성립하지 않는다.
따라서 $k\neq 0$, $\cos(k^2+b)\neq 0$
㉠에서 $\tan(k^2+b)=\dfrac{1}{2k^2}$ …… ㉡
조건 (나)에서
$2k\sin(k^2+b)=2\sqrt{3}k\cos(k^2+b)$
$\tan(k^2+b)=\sqrt{3}$ …… ㉢
㉡, ㉢에서
$\dfrac{1}{2k^2}=\sqrt{3}$
$k^2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
㉡에서 $\tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+b\right)=\sqrt{3}$이고 $0<b<\dfrac{\pi}{2}$이므로
$\dfrac{\sqrt{3}}{6}+b=\dfrac{\pi}{3}$
$b=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$
따라서 $a+b=0+\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

21. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 성질을 추론한다.

ㄱ. 조건 (가)에서
$g(x)=(x+1)\int_1^x f'(t)dt-\int_1^x tf'(t)dt$
양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=\int_1^x f'(t)dt+(x+1)f'(x)-xf'(x)$
$=\int_1^x f'(t)dt+f'(x)$
따라서 $g'(1)=f'(1)=\dfrac{1}{e}$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 $g(x)=\int_1^x f'(t)(x+1-t)dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g(1)=0$
조건 (나)에서
$f(x)=g'(x)-f'(x)$
$=\int_1^x f'(t)dt$
이므로 $x=1$을 대입하면
$f(1)=0$
따라서 $g(1)=f(1)$ (참)

ㄷ. $h(x)=g(x)-f(x)$라 하면 ㄴ에 의하여
$h(1)=g(1)-f(1)=0$
$h'(x)=g'(x)-f'(x)=f(x)$
$h'(1)=f(1)=0$
$h''(x)=f'(x)=xe^{-x^2}$
$x>0$에서 $h''(x)>0$이므로
$0<x<1$에서 $h'(x)<0$이고,
$x>1$에서 $h'(x)>0$
$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	0	↗

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0이므로
모든 양수 x에 대하여
$h(x)=g(x)-f(x)\geq 0$이므로
$g(x)<f(x)$인 양수 x가 존재하지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f(x)=e^{3x-3}+1$에서
$f'(x)=3e^{3x-3}$
따라서 $f'(1)=3$

23. [출제의도] 이항정리를 이해하여 다항식의 계수를 구한다.

다항식 $\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\,2^{6-2r}x^{6-r}$
따라서 x^4의 계수는 $r=2$일 때
${}_6\mathrm{C}_2\,2^{6-4}=\dfrac{6\times5}{2}\times2^2$
$=60$

24. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

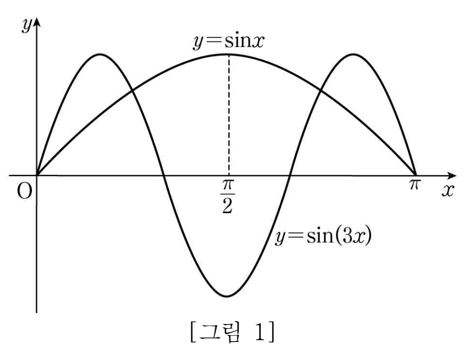
$f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로
$f(x)=\int f'(x)dx$
$=\int\dfrac{1}{x}dx$
$=\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)
$f(1)=10$이므로 $C=10$
$f(x)=\ln|x|+10$에서
$f(e^3)=\ln e^3+10=13$

25. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-a}$은 감소함수이므로
닫힌 구간 $[2,\ 3]$에서 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.
$f(2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-a}=27$
$3^{a-4}=3^3$
$a=7$
$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-7}$
함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[2,\ 3]$에서 $x=3$일 때 최솟값을 가지므로
$m=f(3)$
$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{6-7}$
$=3$
따라서 $a\times m=7\times3=21$

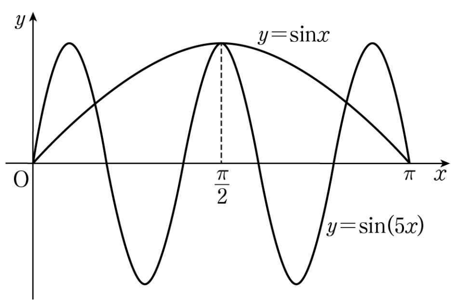
26. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 두 그래프가 만나는 점의 개수를 추론한다.

두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{3}$이므로 $0\leq x\leq\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$를 좌표평면에 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(3x)$의 교점의 개수가 4이므로
$a_3=4$
두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 주기가 각각 2π, $\dfrac{2\pi}{5}$이므로 $0\leq x\leq\pi$에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$를 좌표평면에 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\sin(5x)$의 교점의 개수가 5이므로
$a_5=5$
따라서 $a_3+a_5=4+5=9$

27. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로
$2=\log_2 4a$
$a=1$
따라서 점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$
점 B의 x좌표를 b라 하면 점 $\mathrm{B}(b,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로
$2=\log_2 b$
$b=4$
따라서 점 B의 좌표는 $(4,\ 2)$
점 C의 x좌표를 c라 하면 점 $\mathrm{C}(c,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로
$k=\log_2 4c$
$c=2^{k-2}$
따라서 점 C의 좌표는 $(2^{k-2},\ k)$
점 D의 x좌표를 d라 하면 점 $\mathrm{D}(d,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로
$k=\log_2 d$
$d=2^k$
따라서 점 D의 좌표는 $(2^k,\ k)$
점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 4이고, 점 E가 선분 CD를 $1:2$로 내분하므로
$4=\dfrac{1\times2^k+2\times2^{k-2}}{1+2}$
$=\dfrac{2\times2^{k-1}+2^{k-1}}{3}$
$=\dfrac{3\times2^{k-1}}{3}$
$=2^{k-1}$
$2^2=2^{k-1}$
$k-1=2$
$k=3$
따라서 $\mathrm{C}(2,\ 3)$, $\mathrm{D}(8,\ 3)$, $\mathrm{E}(4,\ 3)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$
사각형 ABDC의 넓이 S는
$S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{BE}}$
$=\dfrac{1}{2}\times(3+6)\times1$
$=\dfrac{9}{2}$
따라서 $12S=54$

28. [출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

입체도형을 직선 $x=t\ (0\leq t\leq 2)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가

$(2\sqrt{2t}+1)-\sqrt{2t}=\sqrt{2t}+1$

인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=(\sqrt{2t}+1)^2$

$=2t+2\sqrt{2t}+1$

구하는 입체도형의 부피 V는

$V=\int_0^2 (2t+2\sqrt{2t}+1)\,dt$

$=\left[t^2+\frac{4\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t}+t\right]_0^2$

$=\left(4+\frac{16}{3}+2\right)-0$

$=\frac{34}{3}$

따라서 $30V=340$

29. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 추론한다.

(i) $a=0$인 경우

$\frac{bc}{a}$가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $a=1$인 경우

$\frac{bc}{a}$는 항상 정수이므로 b, c를 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(iii) $a=2$인 경우

$bc=2k$ (k는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$가 정수이다. $a=2$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 b와 c가 모두 홀수인 경우의 수 4를 빼면 되므로 $16-4=12$

(iv) $a=3$인 경우

$bc=3k$ (k는 정수)일 때 $\frac{bc}{a}$가 정수이다. $a=3$일 때 b와 c를 택하는 전체 경우의 수 16에서 $bc\neq 3k$인 경우의 수를 빼면 된다.

$bc\neq 3k$인 경우의 수는 1, 2에서 2개를 택하는 중복순열의 수 ${}_2\Pi_2=4$이므로

$16-4=12$

(i)~(iv)에 의하여 $\frac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $16+12+12=40$

30. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 함숫값에 관한 문제를 해결한다.

자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$의 미분가능성을 조사하므로 $k\geq 1$에서만 생각한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $(f\circ g)(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $|(f\circ g)(x)|$의 미분가능성은 함수 $(f\circ g)(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값에 대해서만 판단하면 된다.

$g(x)=\frac{3x}{e^{x-1}}+k=3xe^{1-x}+k$에서

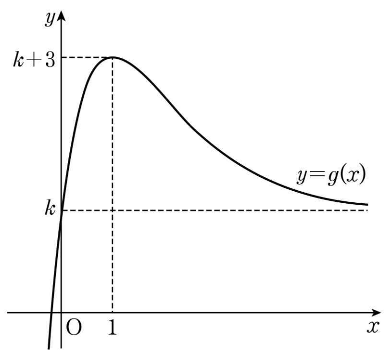
$g'(x)=3e^{1-x}-3xe^{1-x}=3(1-x)e^{1-x}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$k+3$	↘

이고, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=k$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $f(x)$는 조건 (가)에서

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 실수)

방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지면

방정식 $x^2+ax+b=0$이 허근을 가지므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b>0$이다.

즉 $f(x)\geq 0$이므로 모든 자연수 k에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이다.

모든 자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 4인 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.

두 자연수 α, β $(1\leq\alpha\leq\beta\leq 10)$에 대하여

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)(x-\beta)$

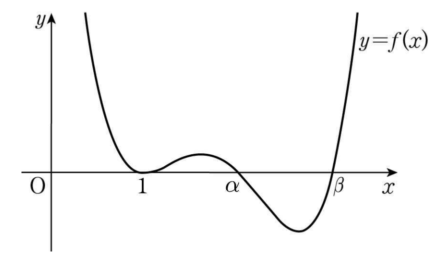
(i) $\alpha=\beta$인 경우

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)^2$이고 모든 실수 x에 대하여 $(x-\alpha)^2\geq 0$이므로 $f(x)\geq 0$

따라서 $(f\circ g)(x)\geq 0$이므로 모든 자연수 k에 대하여 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ii) $1<\alpha<\beta$인 경우

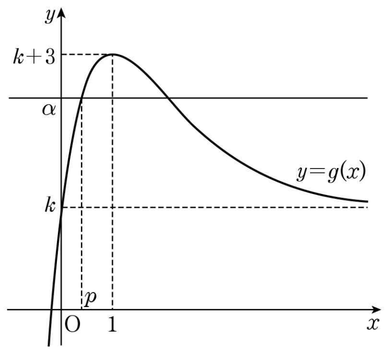
곡선 $y=f(x)$의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

(1) $k+3>\alpha$인 경우

[그림 3]에서 방정식 $g(x)=\alpha$를 만족시키는 $x<1$인 실수 x를 p라 하자.



[그림 3]

$\lim_{x\to p}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(p)|}{x-p}$

$=\lim_{x\to p}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$

이때 $f(g(p))=0$이고, $x\to p-$ 이면

[그림 3]에서 $g(x)\to\alpha-$ 이므로

[그림 2]에서 $(f\circ g)(x)\to 0+$

$\lim_{x\to p-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$

$=\lim_{x\to p-}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(p))}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$

$=f'(g(p))g'(p)$

$=f'(\alpha)g'(p)$

한편, $f(g(p))=0$이고, $x\to p+$ 이면

[그림 3]에서 $g(x)\to\alpha+$ 이므로

[그림 2]에서 $(f\circ g)(x)\to 0-$

$\lim_{x\to p+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(p))|}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$

$=\lim_{x\to p+}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(p))}{g(x)-g(p)}\times\frac{g(x)-g(p)}{x-p}\right\}$

$=-f'(g(p))g'(p)$

$=-f'(\alpha)g'(p)$

이때 [그림 2], [그림 3]에서

$f'(\alpha)<0$, $g'(p)>0$

이므로 $f'(\alpha)g'(p)<0$

$f'(\alpha)g'(p)\neq -f'(\alpha)g'(p)$

이므로 함수 $|(f\circ g)(x)|$는 $x=p$에서 미분가능하지 않다.

(2) $k+3\leq\alpha$인 경우

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\leq k+3\leq\alpha$이므로 [그림 2]에서 $(f\circ g)(x)\geq 0$이다. 함수 $|(f\circ g)(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면

$4\leq\alpha-3<5$

$7\leq\alpha<8$

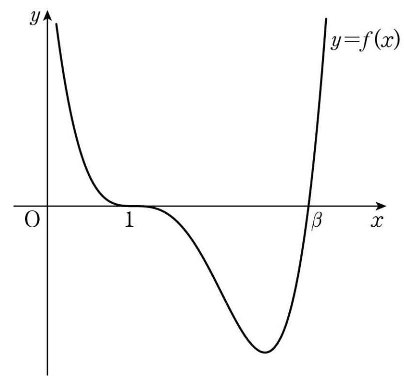
이고, α는 자연수이므로 $\alpha=7$

$\alpha<\beta\leq 10$이므로 조건을 만족시키는

순서쌍 (α, β)는 $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$이다.

(iii) $1=\alpha<\beta$인 경우

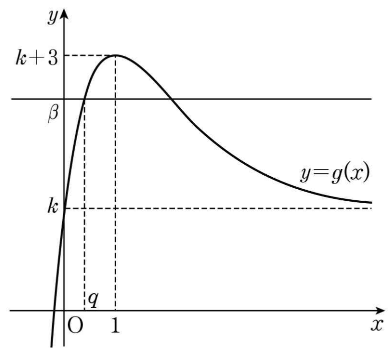
곡선 $y=f(x)$의 개형은 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

(1) $k+3>\beta$인 경우

[그림 5]에서 방정식 $g(x)=\beta$를 만족시키는 $x<1$인 실수 x를 q라 하자.



[그림 5]

$\lim_{x\to q}\frac{|(f\circ g)(x)|-|(f\circ g)(q)|}{x-q}$

$=\lim_{x\to q}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$

이때 $f(g(q))=0$이고, $x\to q-$ 이면

[그림 5]에서 $g(x)\to\beta-$ 이므로

[그림 4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0-$

$\lim_{x\to q-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$

$=\lim_{x\to q-}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(q))}{g(x)-g(q)}\times\frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$

$=-f'(g(q))g'(q)$

$=-f'(\beta)g'(q)$

한편, $f(g(q))=0$이고, $x\to q+$ 이면

[그림 5]에서 $g(x)\to\beta+$ 이므로

[그림 4]에서 $(f\circ g)(x)\to 0+$

$$\lim_{x \to q+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(q))|}{g(x)-g(q)} \times \frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$$= \lim_{x \to q+}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(q))}{g(x)-g(q)} \times \frac{g(x)-g(q)}{x-q}\right\}$$
$= f'(g(q))g'(q)$

$= f'(\beta)g'(q)$

이때 [그림 4], [그림 5]에서

$f'(\beta) > 0$, $g'(q) > 0$

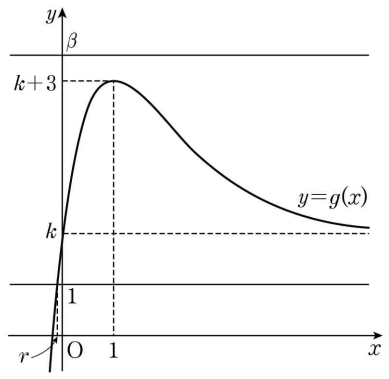
이므로 $f'(\beta)g'(q) > 0$

$-f'(\beta)g'(q) \neq f'(\beta)g'(q)$

이므로 함수 $|(f \circ g)(x)|$는 $x = q$에서 미분가능하지 않다.

(2) $1 = \alpha < k+3 \le \beta$인 경우

[그림 6]에서 방정식 $g(x) = 1$을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하며 $x < 1$이다. 이 실수를 r라 하자.



[그림 6]

(ㄱ) $x < r$인 경우

[그림 6]에서 $x < r$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) < 1$이므로 [그림 4]에서 $(f \circ g)(x) > 0$이다. 따라서 $x < r$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $|(f \circ g)(x)|$는 미분가능하다.

(ㄴ) $x > r$인 경우

[그림 6]에서 $x > r$인 모든 실수 x에 대하여 $1 < g(x) \le \beta$이므로

[그림 4]에서 $(f \circ g)(x) \le 0$이다.

따라서 $x > r$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $|(f \circ g)(x)|$는 미분가능하다.

(ㄷ) $x = r$인 경우

$$\lim_{x \to r}\frac{|(f \circ g)(x)|-|(f \circ g)(r)|}{x-r}$$
$$= \lim_{x \to r}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)} \times \frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
이때 $f(g(r)) = 0$이고, $x \to r-$ 이면

[그림 6]에서 $g(x) \to 1-$ 이므로

[그림 4]에서 $(f \circ g)(x) \to 0+$

$$\lim_{x \to r-}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)} \times \frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$= \lim_{x \to r-}\left\{\frac{f(g(x))-f(g(r))}{g(x)-g(r)} \times \frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$= f'(g(r))g'(r) = f'(1)g'(r) = 0$

한편, $f(g(r)) = 0$이고, $x \to r+$ 이면

[그림 6]에서 $g(x) \to 1+$ 이므로

[그림 4]에서 $(f \circ g)(x) \to 0-$

$$\lim_{x \to r+}\left\{\frac{|f(g(x))|-|f(g(r))|}{g(x)-g(r)} \times \frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$$= \lim_{x \to r+}\left\{-\frac{f(g(x))-f(g(r))}{g(x)-g(r)} \times \frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right\}$$
$= -f'(g(r))g'(r) = -f'(1)g'(r) = 0$

따라서

$$\lim_{x \to r-}\frac{|(f \circ g)(x)|-|(f \circ g)(r)|}{x-r}$$
$$= \lim_{x \to r+}\frac{|(f \circ g)(x)|-|(f \circ g)(r)|}{x-r}$$
이므로 함수 $|(f \circ g)(x)|$는 $x = r$에서 미분가능하다. 즉, $1 = \alpha < k+3 \le \beta$일 때 실수 전체의 집합에서 함수 $|(f \circ g)(x)|$가 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수가 4이려면

$4 \le \beta - 3 < 5$, $7 \le \beta < 8$

이고, β는 자연수이므로 $\beta = 7$이다.

$\alpha = 1$이므로 순서쌍 (α, β)는 $(1, 7)$이다.

(3) $k+3 \le 1 = \alpha$인 경우

조건을 만족시키는 자연수 k가 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 자연수 k의 개수가 4가 되도록 하는 순서쌍 (α, β)는 $(7, 8)$, $(7, 9)$, $(7, 10)$, $(1, 7)$이다. 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0) = \alpha\beta$이므로 $f(0)$은 순서쌍 (α, β)가 $(7, 10)$일 때 최댓값 70, $(1, 7)$일 때 최솟값 7을 갖는다.

따라서 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$70 + 7 = 77$