2019학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

나 형 정답

1	①	2	②	3	②	4	⑤	5	③
6	⑤	7	③	8	④	9	③	10	②
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	③
16	①	17	⑤	18	④	19	②	20	④
21	①	22	22	23	6	24	33	25	15
26	9	27	12	28	10	29	477	30	4

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2\times3) = \log_6 6 = 1$

2. [출제의도] 등차수열의 제7항을 계산한다.

$a_7 = 7 + (7-1)\times3 = 25$

3. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 교집합의 원소의 개수를 구한다.

$A\cap B = \{3, 4\}$에서 집합 $A\cap B$의 원소의 개수는 2이므로 $n(A\cap B) = 2$이다.

4. [출제의도] 합성함수의 값을 구한다.

$f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(3)=1,\ f(4)=2,\ f(5)=3$이므로
$(f\circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 5$

5. [출제의도] 등비급수의 합을 계산한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이고 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$이다.

[보충 설명] 등비급수의 수렴과 발산
등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\ (a\neq0)$은
(i) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.
(ii) $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

6. [출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 주어진 함숫값을 구한다.

$2g(5)=4$에서 $g(5)=2$
따라서 역함수의 정의로부터 $f(2)=5$이다.

7. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 자연수의 값의 합을 구한다.

지수법칙을 이용하여 식을 정리하면
$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}}$이다.
$a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되기 위해서는 자연수 a를 어떤 자연수의 세제곱 꼴로 나타낼 수 있어야 한다.
$1^3=1,\ 2^3=8,\ 3^3=27,\ \cdots$ 이고 a는 10 이하의 자연수이므로 $a^{\frac{1}{3}}$의 값이 자연수가 되는 a의 값은 1, 8이다.
따라서 모든 a의 값의 합은 $1+8=9$이다.

8. [출제의도] 명제의 참과 거짓을 판별한다.

명제 $p\to q$에 대하여 두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $P\not\subset Q$일 때 거짓이다. 그러므로 진리집합 P의 원소이지만 진리집합 Q의 원소가 아닌 예를 찾아야 한다.
자연수 x에 대하여 두 조건
'$p: 5\leq x\leq 9$', '$q: x\leq 8$'의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면 $P=\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다.
따라서 명제 $p\to q$가 거짓임을 보여 주는 x의 값은 집합 P에 속하지만 집합 Q에는 속하지 않는 원소인 9이다.

9. [출제의도] 부분집합의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구한다.

$A\cap X = A$에서 $A\subset X$,
$X\cup(A\cup B) = A\cup B$에서 $X\subset(A\cup B)$
그런데 $A=\{1, 2, 3, 4\}$이므로 집합 X에 집합 A의 원소인 1, 2, 3, 4가 모두 속해야 한다.
또한 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 집합 X가 될 수 있는 경우는 다음과 같다.
(i) 원소 5, 6이 모두 속하지 않는 경우
$X=\{1, 2, 3, 4\}$
(ii) 원소 5는 속하고 6은 속하지 않는 경우
$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(iii) 원소 5는 속하지 않고 6은 속하는 경우
$X=\{1, 2, 3, 4, 6\}$
(iv) 원소 5, 6이 모두 속하는 경우
$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 집합 X의 개수는 4이다.

[다른 풀이]
$A=\{1, 2, 3, 4\}$이고 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 두 원소 5, 6이 집합 X에 각각 속하는 경우, 속하지 않는 경우로 나누어 집합 X의 개수를 구하면 $2^2=4$이다.

10. [출제의도] 상용로그를 계산하여 주어진 상용로그의 값을 문자로 표현한다.

$$\begin{aligned} 2\log12 &= \log12^2 = \log144 \\ &= \log(1.44\times100) \\ &= \log1.44 + \log100 \\ &= \log1.44 + \log10^2 \\ &= \log1.44 + 2\log10 \\ &= a+2 \end{aligned}$$

11. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

도형 R의 넓이가 3이므로 $2n$개의 도형 R를 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 만든 직사각형의 넓이는 $6n$이다.
그러므로 $a_n = 6n$에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=10}^{15} a_n &= \sum_{n=10}^{15} 6n = \sum_{n=1}^{15} 6n - \sum_{n=1}^{9} 6n \\ &= 6\times\frac{15\times16}{2} - 6\times\frac{9\times10}{2} \\ &= 450 \end{aligned}$$

12. [출제의도] 합성함수와 역함수의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

함수 f와 함수 g는 서로 역함수이므로 $g\circ f = I$ (단, I는 항등함수)이다.
그러므로 $g\circ f\circ f = (g\circ f)\circ f = I\circ f = f$
따라서

$$\begin{aligned} (g\circ f\circ f)(15) &= ((g\circ f)\circ f)(15) \\ &= (I\circ f)(15) \\ &= f(15) \\ &= \sqrt{15+1}+1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

[다른 풀이]
$f(15) = \sqrt{15+1}+1 = 5$,
$f(5) = \sqrt{5+1}+1 = \sqrt{6}+1$,
$g(\sqrt{6}+1) = (\sqrt{6}+1-1)^2 - 1 = 5$
이므로

$$\begin{aligned} (g\circ f\circ f)(15) &= g(f(f(15))) \\ &= g(f(5)) \\ &= g(\sqrt{6}+1) = 5 \end{aligned}$$

13. [출제의도] 등비수열이 수렴할 조건을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 값을 구한다.

(i) $0<\frac{m}{5}<1$, 즉 $0<m<5$이면
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

그러므로 자연수 m의 값은 1, 2, 3, 4

(ii) $\frac{m}{5}=1$, 즉 $m=5$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n = 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

그러므로 $m\neq5$

(iii) $\frac{m}{5}>1$, 즉 $m>5$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{5}\right)^n = \infty$이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{m}{5}+2\times\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{m}{5}\right)^n}} \\ &= \frac{\frac{m}{5}+0}{1+0} = \frac{m}{5} \end{aligned}$$

즉, $\frac{m}{5}=2$에서 $m=10$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\frac{m}{5}\right)^n+1} = 2$가 되도록 하는 자연수 m의 개수는 5

[보충 설명] 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산
(i) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)
(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)
(iii) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)
(iv) $r\leq-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

14. [출제의도] 명제의 필요조건을 이용하여 값을 구한다.

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면
$P=\{x\,|\,x\leq-5$ 또는 $x>3\}$, $Q=\left\{\frac{2a+1}{3}\right\}$
이고 $\sim p$의 진리집합은 $P^C=\{x\,|\,-5<x\leq3\}$이다.
$\sim p$가 q이기 위한 필요조건이 되기 위해서는
$q \Rightarrow \sim p$, 즉 $Q\subset P^C$이므로
$-5<\frac{2a+1}{3}\leq3$,
$-8<a\leq4$
따라서 정수 a의 최댓값은 4, 최솟값은 -7이므로 그 합은 $4+(-7)=-3$이다.

15. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

자연수 n의 값과 상관없이 $n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로 $f(n)=1$
$n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것의 개수는
(i) $n(n-4)>0$일 때, 2
(ii) $n(n-4)=0$일 때, 1
(iii) $n(n-4)<0$일 때, 0
$f(n)>g(n)$에서 $g(n)=0$이어야 하므로 $n(n-4)<0$
즉, $0<n<4$이므로 자연수 n의 값은 1, 2, 3이다.
따라서 모든 n의 값의 합은 $1+2+3=6$이다.

16. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 첫째항을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수, 공비가 음수이므로
$a_{2n-1}>0$에서 $|a_{2n-1}|+a_{2n-1} = 2a_{2n-1}$이고
$a_{2n}<0$에서 $|a_{2n}|+a_{2n} = 0$이다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 $(-2)^2=4$인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k)=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$$
$$=2\times\frac{a_1(4^5-1)}{4-1}$$
$$=\frac{2\times1023\times a_1}{3}$$
$$=682a_1$$

따라서 $682a_1=66$이므로 $a_1=\frac{3}{31}$

17. [출제의도] 유리함수의 그래프의 여러 가지 성질을 추론한다.

ㄱ. 함수 $f(x)=\left|\frac{k}{2x}-2\right|$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $0=\left|\frac{k}{2x}-2\right|$에서 $\frac{k}{2x}=2$ 즉, $x=\frac{k}{4}$이므로 점 A의 좌표는 $\left(\frac{k}{4},0\right)$이다. (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 클 때, 점 P는 함수 $y=2-\frac{k}{2x}\left(x>\frac{k}{4}\right)$의 그래프 위의 점이다. 직선 $y=2$는 함수 $y=2-\frac{k}{2x}$의 그래프의 한 점근선이므로 점 P의 y좌표는 2보다 작다. 따라서 선분 PQ의 길이는 2보다 작다. (참)

ㄷ. 점 P의 x좌표가 k일 때, 점 P의 좌표는 $\left(k,\frac{3}{2}\right)$이므로 삼각형 AQP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(k-\frac{k}{4}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{9k}{16}$이다.
9와 16은 서로소이므로 $\frac{9k}{16}$가 자연수가 되기 위해서 자연수 k는 16의 배수가 되어야 한다.
그러므로 자연수 k의 최솟값은 16이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. [출제의도] 이차방정식의 중근을 이용하여 수열의 극한을 구하는 과정을 증명한다.

원점을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은 $y=b_nx$이다.
이 직선이 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$에 접하므로 이차방정식 $b_nx=-(x-n)(x-n-2)$의 근 $x=a_n$은 중근이다.
그러므로 이차방정식

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$$

에서 이차식

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$

는 완전제곱식으로 나타내어진다. 즉,

$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=\{x+\sqrt{n(n+2)}\}^2$

또는

$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2$

그런데 $a_n>0$이므로

$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2=0$

에서 $a_n=\boxed{\sqrt{n(n+2)}}$이고,

x항의 계수에서 $b_n-2(n+1)=-2\sqrt{n(n+2)}$, 즉

$$b_n=\boxed{2\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n(n+2)}\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n(n+2)}}{n+1+\sqrt{n(n+2)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\boxed{1}$$

이다.

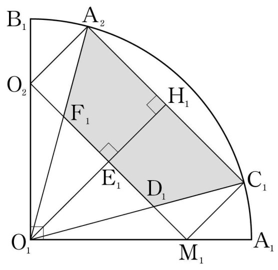
$f(n)=\sqrt{n(n+2)}$,

$g(n)=2\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}$,

$\alpha=1$이고 $f(1)=\sqrt{3}$, $g(1)=2(2-\sqrt{3})$

따라서 $2f(1)+g(1)=2\sqrt{3}+2(2-\sqrt{3})=4$

19. [출제의도] 반복되는 도형의 닮음비를 추론하여 등비급수의 값을 구한다.



점 O_1에서 선분 C_1A_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하고, 선분 O_1C_1, O_1H_1, O_1A_2가 선분 M_1O_2와 만나는 점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하자.

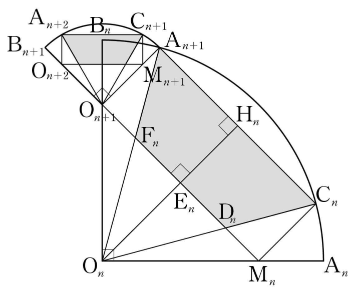
$\overline{O_1M_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$이고 삼각형 $O_1M_1O_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{O_2M_1}=2$, $\angle O_1O_2E_1=45°$이다.

삼각형 $O_1E_1O_2$도 $\angle O_1E_1O_2=90°$이므로 직각이등변삼각형이고 $\overline{O_1E_1}=1$이다.

$\overline{A_2C_1}=\overline{O_2M_1}=2$이므로 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이고 $\overline{O_1H_1}=\sqrt{3}$이다.

또, $\triangle O_1D_1F_1 \backsim \triangle O_1C_1A_2$이고 $\overline{O_1E_1}:\overline{O_1H_1}=1:\sqrt{3}$이므로 두 삼각형의 넓이의 비는 $1:3$이다. 그러므로

$$S_1=\triangle O_1C_1A_2-\triangle O_1D_1F_1$$
$$=\triangle O_1C_1A_2-\frac{1}{3}\triangle O_1C_1A_2$$
$$=\frac{2}{3}\triangle O_1C_1A_2=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$\overline{O_nA_n}=r_n$, $\overline{O_{n+1}A_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하면

$\overline{O_nM_n}=\overline{O_nO_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$이다.

두 삼각형 $O_nM_nO_{n+1}$, $O_nE_nO_{n+1}$은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이고 $\overline{O_nE_n}=\frac{1}{2}r_n$이다.

$\overline{A_{n+1}C_n}=\overline{O_{n+1}M_n}=r_n$이므로 삼각형 $O_nC_nA_{n+1}$은 정삼각형이다. $\overline{O_nH_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$이므로

$$r_{n+1}=\overline{E_nH_n}=\overline{O_nH_n}-\overline{O_nE_n}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n-\frac{1}{2}r_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}r_n$$

이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

앞의 그림에서 $\overline{O_1M_1}=\overline{O_1O_2}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 $O_1M_1O_2$는 직각이등변삼각형이다.

$\angle O_1M_1O_2=\angle O_1O_2M_1=45°$이고 $\angle O_1E_1M_1=90°$이므로 두 삼각형 $O_1E_1O_2$, $O_1E_1M_1$은 모두 직각이등변삼각형이고 $\overline{O_1E_1}=\overline{E_1O_2}=\overline{E_1M_1}=1$이다.

직각삼각형 $O_1H_1A_2$에서

$\overline{O_1A_2}^2=\overline{O_1H_1}^2+\overline{H_1A_2}^2$, $2^2=\left(1+\overline{E_1H_1}\right)^2+1^2$이므로

$\overline{E_1H_1}=\sqrt{3}-1$

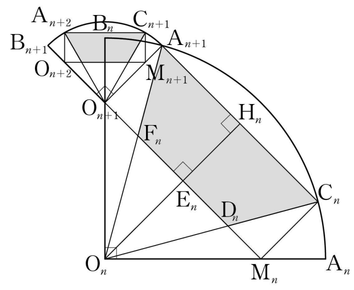
또, $\triangle O_1E_1F_1 \backsim \triangle O_1H_1A_2$에서

$\overline{O_1E_1}:\overline{O_1H_1}=\overline{E_1F_1}:\overline{H_1A_2}$이고 $\overline{H_1A_2}=1$이므로

$1:\sqrt{3}=\overline{E_1F_1}:1$에서 $\overline{D_1F_1}=2\overline{E_1F_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

사각형 $A_2F_1D_1C_1$은 사다리꼴이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\overline{D_1F_1}+\overline{C_1A_2}\right)\times\overline{E_1H_1}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)\times(\sqrt{3}-1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$\overline{O_nA_n}=r_n$, $\overline{O_{n+1}A_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하면

$\overline{O_nM_n}=\overline{O_nO_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r_n$이고

$\overline{O_nE_n}=\overline{E_nO_{n+1}}=\overline{E_nM_n}=\frac{1}{2}r_n$이다.

직각삼각형 $O_nH_nA_{n+1}$에서

$\overline{O_nA_{n+1}}^2=\overline{O_nH_n}^2+\overline{H_nA_{n+1}}^2$이므로

$r_n^2=\left(\frac{1}{2}r_n+r_{n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2}r_n\right)^2$에서 $r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}r_n$

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{4}{3}$

20. [출제의도] 집합을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a\notin A$이므로 a와 $2a$가 집합 A에 동시에 속할 수 없다.

a, $2a$가 모두 속하는 집합들로 집합 U를 나누어 보면 다음과 같다.

$\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,12\}$, $\{5,10\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$

각 집합에 속하는 모든 원소들을 크기 순서대로 나열할 때, 이웃한 두 원소는 동시에 A에 속할 수 없다.

$\{1,2,4,8,16\}$에서 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{16\}$, $\{1,4\}$, $\{1,8\}$, $\{1,16\}$, $\{2,8\}$, $\{2,16\}$, $\{4,16\}$, $\{1,4,16\}$

이다.

이 중 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는 $\{1,4,16\}\subset A$인 경우이다.

마찬가지 방법으로 $\{3,6,12\}$에서 $\{3,12\}\subset A$이고 세 집합 $\{5,10\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$에서는 각 집합의 두 원소 중 하나의 원소가 A에 속한다.

또한 집합 A의 원소의 개수가 최대가 되기 위해서는 11, 13, 15, 17, 19는 항상 A에 속해야 한다.

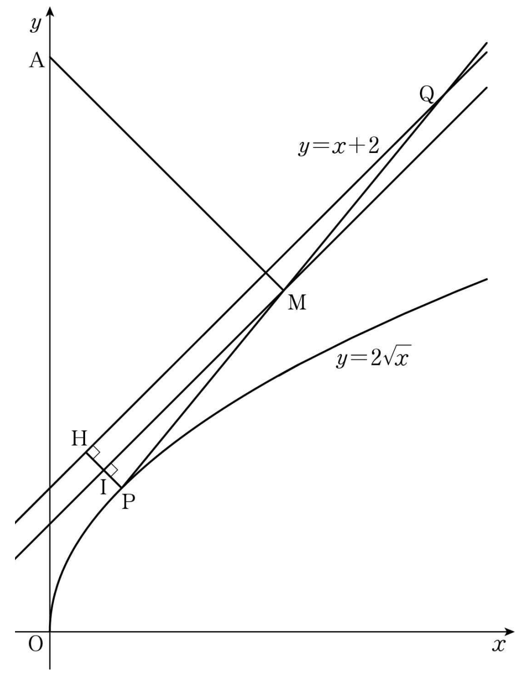
즉, $\{11,13,15,17,19\}\subset A$이다.

이상에서 반드시 포함되어야 하는 원소의 합은 $1+3+4+11+12+13+15+16+17+19=111$이다.

조건 (나)에 의해 각 집합 $\{5,10\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$에서 한 개씩 선택한 원소의 합이 최대인 홀수가 되도록 5, 14, 18을 선택한다.

따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은
$111+5+14+18=148$이다.

21. [출제의도] 무리함수의 그래프 위의 점과 직선 사이의 거리를 이용한 문제를 해결한다.



곡선 $y=2\sqrt{x}$ 위의 임의의 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 점 P에서 직선 $y=x+2$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있으므로
두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은 점 A와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 같다.
즉, 직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값과 점 A와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 합과 같다.
직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값의 $\frac{1}{2}$과 같다.
점 $\mathrm{P}(a, 2\sqrt{a})$라 할 때, 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 $\frac{|a-2\sqrt{a}+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|(\sqrt{a}-1)^2+1|}{\sqrt{2}}$이므로 점 P와 직선 $y=x+2$ 사이의 거리의 최솟값은 $a=1$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.
그러므로 직선 $y=x+2$와 선분 PH의 수직이등분선 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
점 $\mathrm{A}(0, 8)$과 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는 $\frac{|0-8+2|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$이다.
따라서 두 점 M, A 사이의 거리의 최솟값은
$\frac{\sqrt{2}}{4}+3\sqrt{2}=\frac{13\sqrt{2}}{4}$이다.

[보충 설명] 점 P와 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 (i) 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위에 있고, (ii) 선분 PH의 수직이등분선 위를 움직이는 점 M에 대하여 선분 PQ의 중점이 M이 되는, 직선 $y=x+2$ 위의 점 Q가 존재함을 보이자.

(i) 직선 $y=x+2$ 위의 한 점 Q′을 선택하고 선분 PQ′의 중점을 M′이라 하자. 점 Q′이 점 H와 같은 경우 점 M′은 선분 PH의 중점이다. 점 Q′이 점 H와 같지 않은 경우 점 M′에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 I라 하자. 이때, 직각삼각형 PM′I와 직각삼각형 PQ′H는 닮은 도형이고 $\overline{\mathrm{PM'}}=\overline{\mathrm{M'Q'}}$이므로 $\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{IH}}$이다. 즉, 점 M′은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다. 따라서 점 P가 고정되었을 때 직선 $y=x+2$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 중점 M은 선분 PH의 수직이등분선 위의 점이다.

(ii) 선분 PH의 수직이등분선 위의 한 점 M′을 선택하고 선분 PM′의 연장선이 직선 $y=x+2$와 만나는 점을 Q′이라 하자. 점 M′이 선분 PH의 중점 I와 일치하는 경우 점 Q′은 직선 $y=x+2$ 위의 점 H와 일치한다. 점 M′이 선분 PH의 중점 I와 일치하지 않는 경우 두 점 M′, I를 선분으로 연결하자. 직각삼각형 PM′I와 직각삼각형 PQ′H는 닮은 도형이고 $\overline{\mathrm{PI}}=\overline{\mathrm{IH}}$이므로 $\overline{\mathrm{PM'}}=\overline{\mathrm{M'Q'}}$이다. 따라서 점 P가 고정되었을 때 선분 PH의 수직이등분선 위를 움직이는 점 M에 대하여 선분 PQ의 중점이 M이 되는, 직선 $y=x+2$ 위의 점 Q가 존재한다.

22. [출제의도] 로그의 밑의 변환을 이용하여 주어진 식의 값을 계산한다.

로그의 밑의 변환 공식에 의하여
$\frac{1}{\log_a 3}=\log_3 a=\log_3 9^{11}=\log_3(3^2)^{11}=\log_3 3^{22}=22$

23. [출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이해한다.

$y=\frac{2x-7}{x-3}=\frac{2(x-3)-1}{x-3}=\frac{-1}{x-3}+2$에서
함수 $y=\frac{2x-7}{x-3}$의 그래프의 두 점근선의 방정식은
$x=3$, $y=2$이므로 $a=3$, $b=2$이다.
따라서 $ab=6$

24. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$a_n+2b_n=c_n$ …… ㉠, $2a_n+b_n=d_n$ …… ㉡이라 하면
$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$, $\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=90$
$2\times$㉡$-$㉠에서 $3a_n=2d_n-c_n$이므로 $a_n=\frac{1}{3}(2d_n-c_n)$
$2\times$㉠$-$㉡에서 $3b_n=2c_n-d_n$이므로 $b_n=\frac{1}{3}(2c_n-d_n)$
따라서 $a_n+b_n=\frac{1}{3}(c_n+d_n)$이므로
$\lim_{x\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}(c_n+d_n)=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}(c_n+d_n)$
$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to\infty}c_n+\lim_{x\to\infty}d_n\right)=\frac{1}{3}\times(9+90)=33$

[다른 풀이]
$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=9$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=90$이므로
$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)+\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)$
$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+2b_n)+(2a_n+b_n)\}$
$=\lim_{n\to\infty}3(a_n+b_n)$
그러므로 $\lim_{n\to\infty}3(a_n+b_n)=9+90=99$
따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}3(a_n+b_n)=\frac{1}{3}\times 99=33$

25. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 관계식을 이용하여 수열의 항을 구한다.

$a_2=p$라 하면
$a_1=4$, $a_2=p$, $a_3=a_2+a_1=p+4$,
$a_4=a_3+a_2=(p+4)+p=2p+4$이므로
$2p+4=34$에서 $p=15$
따라서 $a_2=15$

26. [출제의도] 로그의 밑과 진수의 조건을 이용하여 문제를 해결한다.

x가 밑이므로 $x>0$, $x\neq 1$ …… ㉠
진수 $-x^2+4x+5$는 $-x^2+4x+5>0$이므로
$x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$, $-1<x<5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $0<x<5$, $x\neq 1$
따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은
$2+3+4=9$

27. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$a_n=ar^{n-1}$이므로 $a_3+a_2=ar^2+ar=1$ …… ㉠
$a_6-a_4=ar^5-ar^3=(ar^2+ar)\times r^2(r-1)=18$ …… ㉡
㉡에 ㉠을 대입하여 r를 구하면
$r^2(r-1)=18$, $r^3-r^2-18=0$
$(r-3)(r^2+2r+6)=0$
r의 값에 상관없이 $r^2+2r+6=(r+1)^2+5>0$이므로
$r-3=0$에서 $r=3$
㉠에 $r=3$을 대입하여 a를 구하면
$a\times 3^2+a\times 3=12a=1$, $a=\frac{1}{12}$
따라서 $a_1=\frac{1}{12}$이므로 $\frac{1}{a_1}=12$

28. [출제의도] 조건으로 제시된 집합을 이용하여 문제를 해결한다.

집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어 있어야 한다. 전체집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29뿐이다.

(i) 집합 A에 25 이상의 원소가 3개만 속한 경우
26, 28, 29가 속한 경우: $A=\{17, 26, 28, 29\}$
25, 26, 29가 속한 경우: $A=\{20, 25, 26, 29\}$
25, 28, 29 또는 25, 26, 28이 속한 경우:
원소의 합이 100이기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수가 되어야 한다. 그런데 3의 배수는 전체집합 U의 원소가 아니므로 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.

(ii) 집합 A에 25 이상의 원소가 2개만 속한 경우
25보다 작은 전체집합 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $22+23=45$이다. 그러므로 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.
28, 29가 속한 경우: $A=\{20, 23, 28, 29\}$
26, 29가 속한 경우: $A=\{22, 23, 26, 29\}$

따라서 위의 네 집합에 대하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값은 각각 10, 8, 4, 4이고 이 중 최댓값은 10이다.

[다른 풀이]
$x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서 $x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$
$x_4-x_3+x_2-x_1=x_4+x_2-(x_3+x_1)$
$=x_4+x_2-\{100-(x_2+x_4)\}$
$=2(x_2+x_4)-100$
이 값이 최대가 되기 위해서는 x_2+x_4의 값이 최대가 되어야 하므로 $x_4=29$이다.
그런데 $x_4>x_3>x_2$에서 x_2는 28이 될 수 없으므로
$x_3=28$, $x_2=26$이다.
따라서 최댓값은 $2\times(29+26)-100=10$이다.

29. [출제의도] 등비수열의 공비를 이용하여 문제를 해결한다.

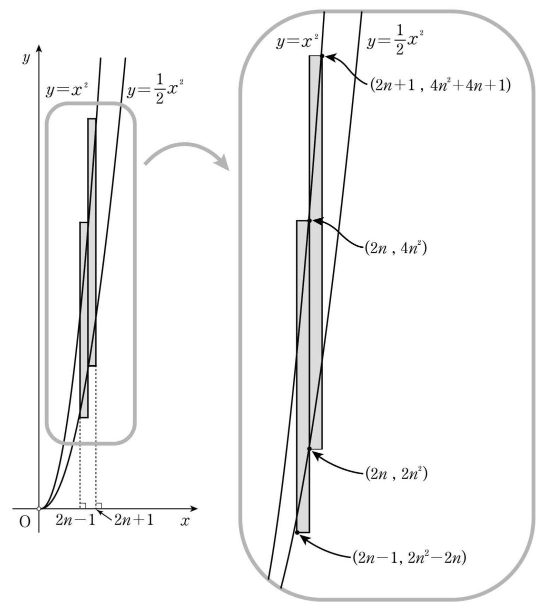
$A(200)$은 조건의 등비수열에서 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합이다.
공비를 2^p이라 하면 $2^{200}=(2^p)^{\frac{200}{p}}$이고 $\frac{200}{p}$은 자연수이어야 하므로 p는 200의 양의 약수이다. 그러므로 $3\times 2^{200}=3\times(2^p)^{\frac{200}{p}}$은 첫째항이 3이고 공비가 2^p인 등비수열의 제$\left(\frac{200}{p}+1\right)$항이다.
$200=2^3\times 5^2$이므로 200의 모든 양의 약수는
1, 2, 2^2, 2^3, 5, 2×5, $2^2\times 5$, $2^3\times 5$, 5^2, 2×5^2, $2^2\times 5^2$, $2^3\times 5^2$
따라서
$A(200)=(2^3\times 5^2+1)+(2^2\times 5^2+1)+\cdots+(2+1)+(1+1)$
$=(2^3\times 5^2+2^2\times 5^2+\cdots+2+1)+12=465+12$
$=477$

30. [출제의도] 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를

추론하여 수열의 극한값을 구한다.

$S_{n+1}-S_n$ 의 값은 $2n-1 \le x < 2n+1$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수와 같다.

$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이라 하자.



(i) $2n-1 \le x < 2n$ 일 때,

$f(2n)=(2n)^2=4n^2$,

$g(2n-1)=\frac{1}{2}\times(2n-1)^2=2n^2-2n+\frac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2-2n$ 보다 크거나 같고 $4n^2$ 보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는

$4n^2-(2n^2-2n)=2n^2+2n$

(ii) $2n \le x < 2n+1$ 일 때,

$f(2n+1)=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$,

$g(2n)=\frac{1}{2}\times(2n)^2=2n^2$

이므로 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 $2n^2$ 보다 크거나 같고 $4n^2+4n+1$ 보다 작은 자연수의 개수와 같다. 즉, 정사각형의 개수는

$(4n^2+4n+1)-2n^2=2n^2+4n+1$

(i), (ii)에서

$S_{n+1}-S_n=(2n^2+2n)+(2n^2+4n+1)=4n^2+6n+1$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=4$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=4$

[다른 풀이]

자연수 m에 대하여

$2m-2<x<2m-1$과 $\frac{1}{2}x^2<y<x^2$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m-1} 이라 하면

$$a_{2m-1}=(2m-1)^2-\frac{(2m-2)^2}{2}$$
$$=2m^2-1$$

$2m-1 \le x < 2m$과 $\frac{1}{2}x^2<y<x^2$ 에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_{2m} 이라 하면

$$a_{2m}=(2m)^2-\frac{(2m-1)^2-1}{2}=2m^2+2m$$

그러므로

$$S_n=\sum_{m=1}^{n-1}(2m^2+2m)+\sum_{m=1}^{n}(2m^2-1)$$
$$=\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n$$

$$S_{n+1}-S_n=\frac{(n+1)\{4(n+1)^2+2\}}{3}+(n+1)^2-2(n+1)$$
$$-\left\{\frac{n(4n^2+2)}{3}+n^2-2n\right\}$$
$$=4n^2+6n+1$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+1}{n^2}=4$