

2019학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 [가형] •

정답

1	④	2	②	3	⑤	4	②	5	③
6	②	7	①	8	③	9	⑤	10	③
11	④	12	⑤	13	③	14	④	15	③
16	①	17	④	18	②	19	⑤	20	①
21	⑤	22	5	23	19	24	8	25	64
26	11	27	71	28	80	29	60	30	359

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4^1 = 4$$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

3. [출제의도] 부채꼴의 호의 길이 계산하기

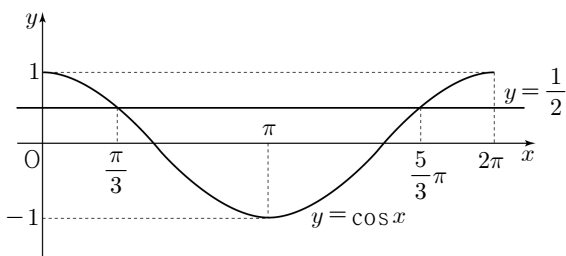
$$r=6, \theta = \frac{5}{6}\pi \text{ 이고 } l=r\theta \text{ 이므로 } l=6 \times \frac{5}{6}\pi = 5\pi$$

4. [출제의도] 지수함수를 이용하여 식의 값 계산하기

$$5^x = \sqrt{3} \text{ 이므로 } 5^{2x} = 3, 5^{-2x} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } 5^{2x} + 5^{-2x} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \text{ 이다.}$$

5. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기



$$2\cos x - 1 = 0 \text{ 을 정리하면 } \cos x = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

이 방정식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.

$$\text{그러므로 구하는 해는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \text{ 이다.}$$

따라서 모든 해의 합은 2π 이다.

6. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = 2^{x+3} - 1$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y = -1$ 이므로 $k = -1$ 이다.

$$\text{따라서 } f(-1) = 2^{-1+3} - 1 = 2^2 - 1 = 3 \text{ 이다.}$$

7. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	...	4	5	6	...
...					
5.97738	.7745	.7752	...
6.07810	.7818	.7825	...
6.17882	.7889	.7896	...

상용로그표에서 $\log 6.04 = 0.7810$ 이므로

$$\log \sqrt{6.04} = \frac{1}{2} \log 6.04 = \frac{1}{2} \times 0.7810 = 0.3905 \text{ 이다.}$$

8. [출제의도] 삼각함수의 일반각 이해하기

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta \text{ 이다.}$$

원점 O와 점 P(5, 12)를 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 하면 $\cos \theta = \frac{5}{13}$ 이다.

$$\text{따라서 } \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta = -\frac{5}{13} \text{ 이다.}$$

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_5 18 = \frac{\log 18}{\log 5} = \frac{\log 2 + 2\log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a+2b}{1-a}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수의 주기가 $\frac{2\pi}{b} = \pi$ 이므로

$b=2$ 이다. 이 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -2 이므로 $a+c=4, -a+c=-2$ 에서 $a=3, c=1$ 이다. 따라서 $2a+b+c=9$ 이다.

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값이 감소하므로 $x=-2$ 에서 최댓값을 가지고,

$x=4$ 에서 최솟값 $\frac{1}{8}$ 을 가진다.

$$f(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+a} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ 에서 } 4+a=3 \text{ 이므로}$$

$$a=-1 \text{ 이고, } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 최댓값은 } f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \text{ 이다.}$$

12. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 2 + \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -8 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y = \log_2(x+8) + k + 2$ 이다.

이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 $x=0$ 일 때 함수값이 0 이상이어야 한다.

$$\text{즉, } \log_2 8 + k + 2 \geq 0 \text{ 에서 } k \geq -5 \text{ 이다.}$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -5 이다.

13. [출제의도] 로그함수가 포함된 부등식 이해하기

로그의 진수 조건에 의해 $x+3 > 0, x-3 > 0$ 에서 $x > 3$ ㉠

$$\log_4(x+3) - \log_2(x-3) \geq 0$$

$$\log_4(x+3) \geq \log_2(x-3)^2$$

$$\log_4(x+3) \geq \log_4(x-3)^2$$

로그의 밑이 1보다 크므로 $(x+3) \geq (x-3)^2$ 이다.

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0 \text{ 에서 } 1 \leq x \leq 6 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $3 < x \leq 6$ 이고 자연수 x 는

4, 5, 6이다.

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 15이다.

14. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$$15^x = 8 = 2^3 \text{ 에서 } 15 = 2^{\frac{3}{x}} \text{ 이고,}$$

$$a^y = 2 \text{ 에서 } a = 2^{\frac{1}{y}} \text{ 이다.}$$

$$15 \times a = 2^{\frac{3}{x}} \times 2^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}} = 2^2 = 4 \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{4}{15} \text{ 이다.}$$

15. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

$$B_1 = \frac{kI_0 r_1^2}{2(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_2 = \frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2 + (3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{kI_0 \times 9r_1^2}{2(9x_1^2 + 9r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{9kI_0 r_1^2}{2 \times 9^{\frac{3}{2}}(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kI_0 r_1^2}{6(x_1^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} B_1$$

$$\text{이므로 } \frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

16. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 추론하기

$3 + 2\sin^2 \theta = t$ 로 놓으면

$$3 + 2\sin^2 \theta + \frac{1}{3-2\cos^2 \theta} = t + \frac{1}{t-2}$$

이다. $0 < \theta < 2\pi$ 에서 $t \geq 3$ 이므로

$$\frac{1}{t-2} > 0 \text{ 이다.}$$

$$t + \frac{1}{t-2} = t - 2 + \frac{1}{t-2} + 2 \geq 4$$

이다. (단, 등호는 $t-2 = \frac{1}{t-2}$ 에서 $t = 3$

일 때 성립한다.)

따라서 $3 + 2\sin^2 \theta = t = 3$ 일 때 $\theta = \pi$ 이고,

이때 $3 + 2\sin^2 \theta + \frac{1}{3-2\cos^2 \theta}$ 은 최솟값 4를

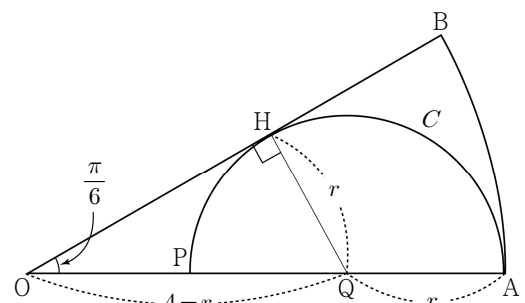
갖는다.

$f(t) = t - 2, p = 3, q = \pi$ 이므로

$$f(p) + \tan^2\left(q + \frac{\pi}{3}\right) = f(3) + \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + 3 = 4$$

이다.

17. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기



반원 C의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r 라 하면 $\overline{OA} = 4$ 이므로 $\overline{OQ} = 4 - r$ 이다. 선분 OB와 반원 C의 접점을 H라 하면 $\overline{QH} = r$ 이다.

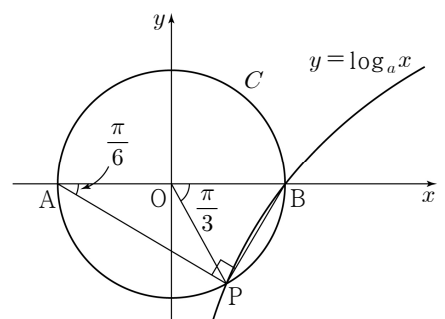
부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{r}{4-r} = \frac{1}{2} \text{ 에서 } r = \frac{4}{3} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } S_1 = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi \text{ 이므로 } S_1 - S_2 = \frac{4}{9}\pi \text{ 이다.}$$

18. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 로그함수 문제 해결하기



삼각형 APB는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이고 $\overline{AP} = \sqrt{3}$ 이므로 $\angle BAP = \frac{\pi}{6}$ 이다. 원점을 O라

하면 $\angle BOP = \frac{\pi}{3}$ 이고, 점 P의 좌표는

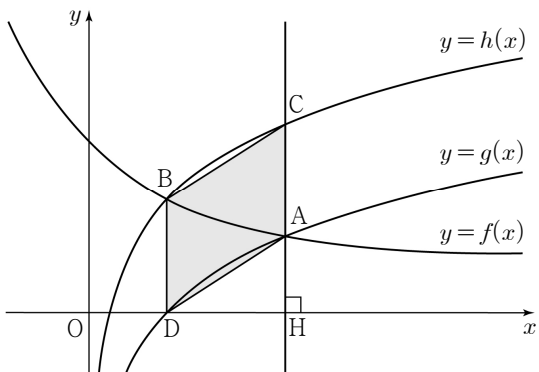
$$\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{이다.}$$

점 P는 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프 위의 점이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \log_a \frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{즉, } a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \text{이므로 } a^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \text{이다.}$$

따라서 $a^{\sqrt{3}} = 2^2 = 4$ 이다.

19. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제의 참, 거짓 추론하기



ㄱ. $f(1) = h(1) = a$ 이므로 점 B의 좌표는 $(1, a)$ 이다. (참)

ㄴ. 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점이므로 점 A의 x 좌표가 4일 때, $\log_2 4 = 2^{1-4} + a - 1$ 이므로 $a = \frac{23}{8}$ 이다.

\overline{BD} 와 \overline{CA} 가 평행하고, $\overline{BD} = \overline{CA} = a$ 이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.

따라서 사각형 ACBD의 넓이는 $3 \times \frac{23}{8} = \frac{69}{8}$ 이다. (참)

ㄷ. $\overline{CA} : \overline{AH} = 3 : 2$ 에서 $2\overline{CA} = 3\overline{AH}$ 이다.

점 A의 x 좌표를 k 라 하면 $\overline{CA} = a$, $\overline{AH} = \log_2 k$ 이므로 $2a = 3\log_2 k$ 이다. ㉠

또한 점 A는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점이므로 $\log_2 k = 2^{1-k} + a - 1$ 이다. ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{1-k} = 1 - \frac{a}{3}$ 이다.

$a > 0$ 에서 점 A의 x 좌표 k 는 1보다 크다. 따라서 $0 < 2^{1-k} < 1$ 이다.

그러므로 $0 < 1 - \frac{a}{3} < 1$ 에서 $0 < a < 3$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. [출제의도] 로그함수를 이용하여 합숫값 추론하기

조건 (가)에서 $|\log_3 a - \log_3 b| \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \log_3 \frac{a}{b} \leq 1 \text{이고 } \frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3 \text{이다.}$$

이때, $b > 0$ 이므로 $\frac{1}{3}b \leq a \leq 3b$ 이다.

조건 (나)에서 $a = 3 - b$ 이므로 $\frac{1}{3}b \leq 3 - b \leq 3b$ 이고,

이 부등식의 해는 $\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{9}{4}$ 이다. 한편,

$$ab = (3-b)b = -\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{9}{4}\right)$$

이므로 ab 는 $b = \frac{3}{4}$ 또는 $b = \frac{9}{4}$ 에서

최솟값 $m = \frac{27}{16}$ 을 가진다.

그러므로 $f(m) = \log_3 \frac{27}{16} = 3 - \log_3 16$ 이다.

따라서 $k = 16$ 이다.

21. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 순서쌍의 개수 문제 해결하기

(i) p, q 가 모두 홀수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} = 3 \times \sqrt[4]{2^{p+q+2}}$$

에서 $p+q+2$ 가 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는

- ① $p+q+2=4$ 일 때, $(1, 1)$
- ② $p+q+2=8$ 일 때, $(1, 5), (3, 3), (5, 1)$
- ③ $p+q+2=12$ 일 때, $(1, 9), (3, 7), (5, 5), (7, 3), (9, 1)$
- ④ $p+q+2=16$ 일 때, $(5, 9), (7, 7), (9, 5)$
- ⑤ $p+q+2=20$ 일 때, $(9, 9)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 13이다.

(ii) p 는 홀수, q 는 짝수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{q+2}}$$

에서 $p+3$ 과 $q+2$ 가 각각 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하이므로 $p+3=4, 8, 12,$

- $q+2=4, 8, 12$ 이고, 조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는 $(1, 2), (1, 6), (1, 10), (5, 2), (5, 6), (5, 10), (9, 2), (9, 6), (9, 10)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 9이다.

(iii) p 는 짝수, q 는 홀수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{p+2}}$$

에서 $q+3$ 과 $p+2$ 가 각각 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하이므로 $p+2=4, 8, 12,$

- $q+3=4, 8, 12$ 이고, 조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는 $(2, 1), (2, 5), (2, 9), (6, 1), (6, 5), (6, 9), (10, 1), (10, 5), (10, 9)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 9이다.

(iv) p, q 가 모두 짝수일 때,

$$f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} = 2 \times \sqrt[4]{3^{p+q}}$$

에서 $p+q$ 가 4의 배수일 때, $f(p) \times f(q)$ 는 자연수이다.

두 자연수 p, q 가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q) 는

- ① $p+q=4$ 일 때, $(2, 2)$
- ② $p+q=8$ 일 때, $(2, 6), (4, 4), (6, 2)$
- ③ $p+q=12$ 일 때, $(2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2)$
- ④ $p+q=16$ 일 때, $(6, 10), (8, 8), (10, 6)$
- ⑤ $p+q=20$ 일 때, $(10, 10)$ 이므로 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 13이다.

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해 구하는 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는 44이다.

22. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

23. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 합숫값 계산하기

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36} \text{이므로}$$

$$36 \cos^2 \theta = 19 \text{이다.}$$

24. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

로그의 밑 조건에 의해 $a+3 > 0, a+3 \neq 1$ 에서 $a > -3, a \neq -2$ 이다.

로그의 진수 조건에 의해 $-a^2 + 3a + 28 > 0$ 에서 $a^2 - 3a - 28 < 0$ 이므로 $-4 < a < 7$ 이다.

두 조건을 동시에 만족하는 범위는

$$-3 < a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < 7 \text{이므로}$$

정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 이다.

따라서 모든 정수 a 의 개수는 8이다.

25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수가 포함된 방정식 문제 해결하기

$A(k, 1 + \log_2 k), B(k, \log_4 k)$ 이고 $k > 1$ 이므로

$$\overline{AB} = (1 + \log_2 k) - \log_4 k = 1 + \frac{1}{2} \log_2 k = 4 \text{에서}$$

$\log_2 k = 6$ 이다. 따라서 $k = 2^6 = 64$ 이다.

26. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$x^a = b$ 에서 x 는 b 의 a 제곱근이다.

(i) $a=5$ 일 때,

b 의 5제곱근 중에서 실수인 것은 b 의 값에 관계 없이 오직 하나 존재한다. 따라서 실수인 x 는

$$\sqrt[5]{-3}, \sqrt[5]{-2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{4}$$

이므로 개수는 5이다.

(ii) $a=6$ 일 때,

① $b > 0$, 즉 $b=2, 3, 4$ 일 때, b 의 a 제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 한 개씩 존재한다. 따라서 실수인 x 는 $\sqrt[6]{2}, -\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{3}, -\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{4}, -\sqrt[6]{4}$ 이므로 개수는 6이다.

② $b < 0$, 즉 $b=-3, -2$ 일 때, b 의 a 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

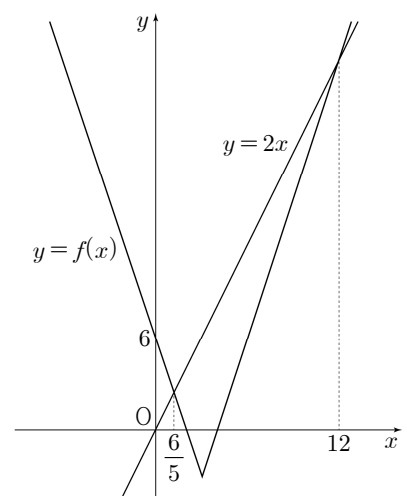
(i), (ii)에서 공통인 x 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $n(C) = 11$ 이다.

27. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 지수함수가 포함된 부등식 문제 해결하기

$2^{f(x)} \leq 4^x = 2^{2x}$ 에서 밑이 1보다 크므로

$f(x) \leq 2x$ 이다. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표를 구하자.



(i) $x < 3$ 일 때, $-3x + 6 = 2x$ 에서 $x = \frac{6}{5}$

(ii) $x \geq 3$ 일 때, $3x - 12 = 2x$ 에서 $x = 12$

(i), (ii)에 의해 부등식 $f(x) \leq 2x$ 의 해는

$$\frac{6}{5} \leq x \leq 12 \text{이므로 실수 } x \text{의 최댓값 } M \text{은 } 12 \text{이고}$$

최솟값 m 은 $\frac{6}{5}$ 이다.

따라서 $M+m = 12 + \frac{6}{5} = \frac{66}{5}$ 이고 $p+q=71$ 이다.

28. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 합숫값 문제 해결하기

$2 \leq \log_n k < 3$ 에서 $n^2 \leq k < n^3$ 이고 로그의 밑 조건에 의해 $n > 1$ 이다.
 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 $n^2 \leq k < n^3$ 을 만족시키는 100 이하의 자연수 k 를 구하면 다음과 같다.
 $n=2$: $4 \leq k < 8$ 에서 $k=4, 5, 6, 7$
 $n=3$: $9 \leq k < 27$ 에서 $k=9, 10, \dots, 26$
 $n=4$: $16 \leq k < 64$ 에서 $k=16, 17, \dots, 63$
 $n=5$: $25 \leq k < 125$ 에서 $k=25, 26, \dots, 100$
 $n=6$: $36 \leq k < 216$ 에서 $k=36, 37, \dots, 100$
 $n=7$: $49 \leq k < 343$ 에서 $k=49, 50, \dots, 100$
 $n=8$: $64 \leq k < 512$ 에서 $k=64, 65, \dots, 100$
 $n=9$: $81 \leq k < 729$ 에서 $k=81, 82, \dots, 100$
 $n=10$: $100 \leq k < 1000$ 에서 $k=100$
 그러므로 k 의 값에 따라 조건을 만족시키는 $f(k)$ 를 구하면 다음과 같다.

- (i) $k=1, 2, 3$ 일 때, $f(k)=0$
 - (ii) $k=4, 5, 6, 7$ 일 때, $f(k)=1$
 - (iii) $k=8$ 일 때, $f(k)=0$
 - (iv) $k=9, 10, \dots, 15$ 일 때, $f(k)=1$
 - (v) $k=16, 17, \dots, 24$ 일 때, $f(k)=2$
 - (vi) $k=25, 26$ 일 때, $f(k)=3$
 - (vii) $k=27, 28, \dots, 35$ 일 때, $f(k)=2$
 - (viii) $k=36, 37, \dots, 48$ 일 때, $f(k)=3$
 - (ix) $k=49, 50, \dots, 80$ 일 때, $f(k)=4$
 - (x) $k=81, 82, \dots, 99$ 일 때, $f(k)=5$
 - (xi) $k=100$ 일 때, $f(k)=6$
- 따라서 $f(k)=4$ 가 되도록 하는 k 의 최댓값은 80이다.

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 문제 해결하기

조건 (가)에서

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 2 - 2^{x-1} & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

이고, 조건 (나)에서

(i) $n=1$ 일 때, $2f(x)=f(x-2)$ ($2 < x \leq 4$)
 즉, $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2)$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} - \frac{1}{2} & (2 < x \leq 3) \\ 1 - 2^{x-4} & (3 < x \leq 4) \end{cases}$$

(ii) $n=2$ 일 때, $2^2 f(x) = f(x-4)$ ($4 < x \leq 6$)

즉, $f(x) = \frac{1}{4}f(x-4)$ 이므로

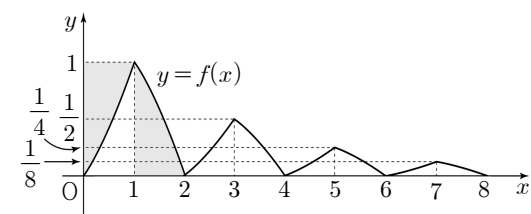
$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-6} - \frac{1}{4} & (4 < x \leq 5) \\ \frac{1}{2} - 2^{x-7} & (5 < x \leq 6) \end{cases}$$

(iii) $n=3$ 일 때, $2^3 f(x) = f(x-6)$ ($6 < x \leq 8$)

즉, $f(x) = \frac{1}{8}f(x-6)$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x-9} - \frac{1}{8} & (6 < x \leq 7) \\ \frac{1}{4} - 2^{x-10} & (7 < x \leq 8) \end{cases}$$

이다. 따라서 $0 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=2^x - 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프는 $1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=2 - 2^{x-1}$ 의 그래프와 일치

한다. 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

같은 방법으로 $2 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의

그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$,

$4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{4}$,

$6 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{8}$ 이다.

따라서 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ 이므로

$32S = 60$ 이다.

30. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 순서쌍의 개수 추론하기

(i) $a=c$ 일 때,

① $k < 24$ 일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍은 존재하지 않는다.

② $24 \leq k < 500$ 일 때,

$$\frac{1}{a^b} \times \frac{1}{c^d} = 24^{\frac{1}{b}} \times 24^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{5}}$$

따라서 $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{b+d}{bd} = \frac{1}{5}$ 이므로

$bd = 5(b+d)$ 이고

$bd - 5b - 5d = 0$ 이 되어 $(b-5)(d-5) = 25$ 이다.

$b-5$	1	5	25
$d-5$	25	5	1

$(b, d) = (6, 30), (10, 10), (30, 6)$ 이다.

$24 \leq k < 30$ 이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(24, 10, 24, 10)$ 이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 1이다.

$30 \leq k < 500$ 이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(24, 6, 24, 30), (24, 10, 24, 10), (24, 30, 24, 6)$ 이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 3이다.

(ii) $a \neq c$ 일 때,

$$24^{\frac{1}{5}} = (2 \times 12)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \times 12^{\frac{1}{5}}$$

$$= (2^p)^{\frac{1}{5p}} \times (12^q)^{\frac{1}{5q}} \dots \dots \textcircled{A}$$

$$24^{\frac{1}{5}} = (3 \times 8)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}} \times 8^{\frac{1}{5}}$$

$$= (3^p)^{\frac{1}{5p}} \times (8^q)^{\frac{1}{5q}} \dots \dots \textcircled{B}$$

$$24^{\frac{1}{5}} = (4 \times 6)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{5}}$$

$$= (4^p)^{\frac{1}{5p}} \times (6^q)^{\frac{1}{5q}} \dots \dots \textcircled{C}$$

의 세 가지 경우가 있다.

한편, 두 자연수 p, q 의 값이 커지면 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수도 증가한다.

$2^p, 3^p, 4^p, 6^p, 8^p, 12^p$ 의 값은 각각 2 이상

k 이하이므로 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 에서

$3^4 = 81, 2^7 = 128, 12^2 = 144, 6^3 = 216,$

$3^5 = 243, \dots$ 을 이용하여 조건을 만족하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수가 59인 경우를 찾아보자.

① $81 \leq k < 128$ 일 때,

\textcircled{A} 에서 $p=1, 2, 3, 4, 5, 6, q=1,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 25, 30, 5q=5$ 이다.

그런데 $a=2^p, c=12^q$ 인 경우와

$a=12^q, c=2^p$ 인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $6 \times 1 \times 2 = 12$ 이다.

\textcircled{B} 에서 $p=1, 2, 3, 4, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 5q=5, 10$ 이다.

그런데 $a=3^p, c=8^q$ 인 경우와 $a=8^q, c=3^p$ 인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.

\textcircled{C} 에서 $p=1, 2, 3, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 5q=5, 10$ 이다.

그런데 $a=4^p, c=6^q$ 인 경우와 $a=6^q, c=4^p$ 인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 이다.

따라서 (i)과 (ii)의 ①에서 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 + 12 + 16 + 12 = 43$ 이므로 조건에 맞지 않다.

마찬가지의 방법으로 구하면

② $128 \leq k < 144$ 일 때,

\textcircled{A} 에서 $p=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, q=1,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 5q=5$ 이다. 그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $7 \times 1 \times 2 = 14$ 이다.

\textcircled{B} 에서 $p=1, 2, 3, 4, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.

\textcircled{C} 에서 $p=1, 2, 3, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 이다.

따라서 (i)과 (ii)의 ②에서 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 + 14 + 16 + 12 = 45$ 이므로 조건에 맞지 않다.

③ $144 \leq k < 216$ 일 때,

\textcircled{A} 에서 $p=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,$

$5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $7 \times 2 \times 2 = 28$ 이다.

\textcircled{B} 에서 $p=1, 2, 3, 4, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.

\textcircled{C} 에서 $p=1, 2, 3, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 이다.

따라서 (i)과 (ii)의 ③에서 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 + 28 + 16 + 12 = 59$ 이다.

그러므로 k 의 최솟값 m 은 144이다.

④ $216 \leq k < 243$ 일 때,

\textcircled{A} 에서 $p=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,$

$5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $7 \times 2 \times 2 = 28$ 이다.

\textcircled{B} 에서 $p=1, 2, 3, 4, q=1, 2,$

즉, $5p=5, 10, 15, 20, 5q=5, 10$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $4 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.

\textcircled{C} 에서 $p=1, 2, 3, q=1, 2, 3,$

즉, $5p=5, 10, 15, 5q=5, 10, 15$ 이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 \times 3 \times 2 = 18$ 이다.

따라서 (i)과 (ii)의 ④에서 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $3 + 28 + 16 + 18 = 65$ 이므로 조건에 맞지 않다.

그러므로 k 의 최댓값 M 은 215이다.

따라서 $M+m = 215 + 144 = 359$ 이다.