수리 영역

정답

1	①	*2*	②	*3*	⑤	*4*	⑤	*5*	③
6	③	*7*	②	*8*	②	*9*	①	*10*	④
11	②	*12*	③	*13*	③	*14*	④	*15*	③
16	⑤	*17*	④	*18*	①	*19*	④	*20*	②
21	②	*22*	25	*23*	11	*24*	10	*25*	104
26	14	*27*	36	*28*	13	*29*	75	*30*	20

해설

1. [출제의도] 집합과 원소 및 부분집합에서의 관계 이해하기

① $\{\phi\} \subset A$
② $3 \not\in A$
③ $\{1\} \subset A$
④ $\{1, 2\} \subset A$
⑤ $\{2, 3\} \in A$
$\therefore \{\phi\} \subset A$

2. [출제의도] 명제의 참, 거짓 판별하기

'ㄷ'의 명제 '이등변삼각형이면 정삼각형이다.'는 거짓이다.

3. [출제의도] 무리수와 복소수 계산하기

$\sqrt{-3}\sqrt{-2} = -\sqrt{6}$

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}i} = -\sqrt{3}i$

(준식) $= -6 - \sqrt{3}i$

4. [출제의도] 실수의 대소 관계 이해하기

① $0 < x < y$이므로 $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

② $\dfrac{y^2}{x} - \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{y^3 - x^3}{xy} > 0$

③ $\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{y^2 - x^4}{x^2 y} = \dfrac{(y - x^2)(y + x^2)}{x^2 y} > 0$
 $(\because x^2 < x < y)$

④ $xy^2 - x^2 y = xy(y - x) > 0$

⑤ (반례) $x = \dfrac{1}{2},\ y = 2$

$\dfrac{1}{2} \times 2 < \dfrac{1}{2} + 2$

5. [출제의도] 이차방정식의 근 판별하기

① $(2x-1)(2x+1) = 0 \quad \therefore x = \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}$
② $(x-2)(x+1) = 0 \quad \therefore x = 2,\ -1$
③ 근의 공식을 이용하면 $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
④ $(x+2)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$ (중근)
⑤ $(x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2,\ 3$

6. [출제의도] 상관표 이해하기

2회 \ 1회	6	7	8	9	10	합계(명)
10			2		1	3
9		2	4	2		8
8		3	2	3	2	10
7		3	4	2		9
6	1	1				2
합계(명)	1	9	12	7	3	32

어두운 부분에 있는 자료의 학생들이 성적이 향상된 학생이다. $2+3+4+2 = 11$명

7. [출제의도] 이차식의 인수분해하기

$x^2 - xy - 6y^2 - x + 8y - 2$
$= (x + 2y - 2)(x - 3y + 1)$
$\therefore a = 2,\ b = -3$ 즉, $a + b = -1$

8. [출제의도] 명제의 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 판단하기

ㄱ. 스위치 S_1, S_2, S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_1이 켜지기 위한 충분조건이다.
ㄴ. 스위치 S_2와 S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_3가 켜지기 위한 충분조건이다.
ㄷ. 스위치 S_2 또는 S_3가 닫히는 것은 전구 L_2와 L_3가 모두 켜지기 위한 필요조건이다.

9. [출제의도] 복소수와 켤레복소수의 성질 이해하기

복소수 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (단, a, b는 실수)라 하면

ㄱ. $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$
  $z = 0 \quad (\because a = b = 0)$
  $\therefore z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다. (참)

ㄴ. $z^2 + (\bar{z})^2 = (a + bi)^2 + (a - bi)^2$
  $= 2(a^2 - b^2)$
  $= 0$
  $\therefore b = \pm a$ 이므로 $z = a \pm ai$ 이다. (거짓)

ㄷ. $z = -\bar{z}$ 이므로 $a + bi = -(a - bi)$
  $\therefore a = 0$ 이므로 $z = bi$ 이다. (거짓)

10. [출제의도] 이차함수 그래프를 해석하여 무리식 계산하기

ⅰ) 대칭축 $x = \dfrac{a}{2} > 0$이므로 $a > 0$
ⅱ) y절편이 음수 이므로 $b < 0$
(준식) $= (a - b) + (a - b) = 2a - 2b$

11. [출제의도] 홀수, 짝수의 성질을 활용한 경우의 수 구하기

11은 홀수이므로 뒤집힌 동전의 개수가 홀수인 경우를 찾으면 된다.
∴ ㄱ, ㄷ

12. [출제의도] 최대공약수, 최소공배수를 이용하여 다항식 구하기

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$는 최소공배수이고 $x - 1$가 최대공약수이므로
$f(x) + g(x) = (x-1)(x+1) + (x-1)(x+2)$
$\therefore f(2) + g(2) = 7$

13. [출제의도] 인수정리 이해하기

다항식 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx - a$라 하면
$x + 1$이 $f(x)$의 인수이므로
$f(-1) = a - b - c - a = 0$, 즉 $b + c = 0$
$f(1) = a + b + c - a = 0$
$\therefore x - 1$은 반드시 $f(x)$의 인수이다.

14. [출제의도] 연산의 정의를 이해하고 그 연산의 성질 이해하기

복소수 $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (단, a, b는 실수)라 하면

ㄱ. $\ll 3 + 4i \gg = 3^2 + 4^2 = 25$ (참)

ㄴ. $\ll z + \bar{z} \gg = 4a^2$
$\ll z \gg + \ll \bar{z} \gg = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$
 $\therefore \ll z + \bar{z} \gg \ne \ll z \gg + \ll \bar{z} \gg$ (거짓)

ㄷ. $\left\langle\!\left\langle \dfrac{1}{z} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \dfrac{1}{a + bi} \right\rangle\!\right\rangle$

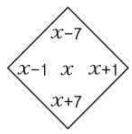
$= \left\langle\!\left\langle \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i \right\rangle\!\right\rangle$

$= \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$

$= \dfrac{1}{\langle\!\langle z \rangle\!\rangle}$ (참)

15. [출제의도] 수의 규칙성을 찾아내 실생활 문제 해결하기

마름모 내부의 5개 숫자들은 표와 같은 규칙이 있다.



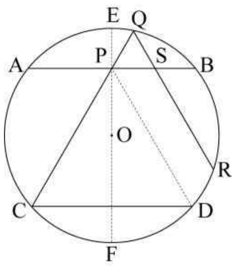
5개의 숫자들의 합은 $5x$이고 x로 가능한 것은 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23 이므로 가능하지 않는 것은 90이다.

16. [출제의도] 이항 연산의 역원과 항등원 구하기

ㄱ. 항등원을 e라 하면 $x ◎ e = xe + x + e = x$
  에서 $e = 0$
ㄴ. $x ◎ y = xy + x + y = yx + y + x = y ◎ x$
ㄷ. $x ◎ x = x ◎ (-2)$
 $x^2 + x + x = -2x + x - 2$
 $x^2 + 3x + 2 = 0,\ x = -1, -2$

17. [출제의도] 네 점이 한 원 위에 있을 조건증명하기

(증명)



점 P를 지나는 지름 $\overline{EF}$를 그을 때, 점 P는 $\overline{AB}$의 중점이므로 $\overline{EF}$와 $\overline{AB}$는 수직이다.

$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 평행이므로 $\overline{EF}$는 $\overline{CD}$를 수직이등분한다.

$\therefore \overline{PC}=\overline{PD}$, $\angle PCD=\angle PDC$

또한, $\angle PDC=\angle SPD$ ($\because$엇각)

따라서 $\angle PCD=\angle SPD$이다.

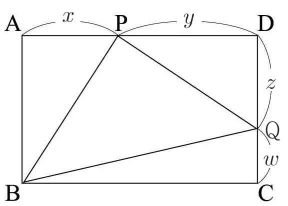
$\angle PCD+\angle SRD=180^\circ$ 이므로,

$\angle SPD+\angle SRD=180^\circ$

그러므로 네 점 P, D, R, S는 같은 원 위의 점이다.

18. [출제의도] 삼각형의 넓이를 이용한 황금비 증명하기

(증명)



그림과 같이 $\overline{AP}=x$, $\overline{PD}=y$

$\overline{DQ}=z$, $\overline{QC}=w$ 라 하면

$x(z+w)=w(x+y)=yz$

이 식을 정리하면

$x(z+w)=w(x+y)$ … ㉠

$x(z+w)=yz$ … ㉡

㉠의 식을 전개하면 $xz+xw=wx+wy$

$\therefore xz=wy$

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{z}{w}=k$ 라 하면 $y=kx$, $z=kw$ 이고 이것을 ㉡에 대입하면 $x(kw+w)=kxkw$

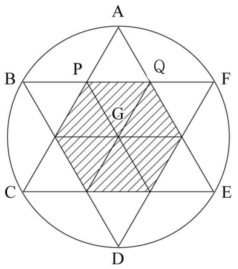
x, y, z, w는 0이 아니므로 $k^2-k-1=0$이다.

$k>0$ 이므로 $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ x:y=w:z=1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

즉, 점 P, Q는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$를 황금분할하는 점이다.

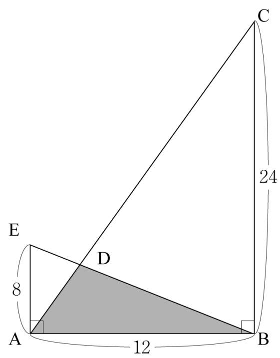
19. [출제의도] 삼각비를 활용한 정육각형의 넓이 구하기



$\triangle ACE$와 $\triangle BDF$의 공통부분은 정육각형이고 정삼각형 APQ와 합동인 삼각형 6개로 이루어졌으며 점 G는 원의 중심이고 $\triangle ACE$의 무게중심이다. $\overline{AG}=2$이므로 $\triangle APQ$는 높이 1인 정삼각형이므로 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 공통부분의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 6=2\sqrt{3}$이다.

20. [출제의도] 삼각형의 닮음을 활용하여 일차연립방정식 풀기



$\triangle ADE \backsim \triangle CDB$이고 $\overline{AE}:\overline{BC}=1:3$이므로 $\triangle ADE$의 넓이를 a라 하면 $\triangle CDB$의 넓이는 $9a$이다. $\triangle ABD$의 넓이를 b라 하면

$a+b=48$ …… ①

$9a+b=144$ …… ②

①과 ②에서 $\triangle ABD=36$이다.

21. [출제의도] 일차함수의 그래프 개형을 해석하여 이차함수의 그래프 개형 그리기

$y=ax+b$에서 $a<0,\ b>0$

$y=cx+d$에서 $c<0,\ d>0$

따라서 $y=(ax+b)(cx+d)$

$\qquad =acx^2+(ad+bc)x+bd$

$ac>0,\ ad+bc<0,\ bd>0$이다.

또한, $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 x절편과 $y=(ax+b)(cx+d)$의 x절편이 일치하는 그래프이다.

22. [출제의도] 복소수의 상등 이해하기

$(1+i)x+(3-i)y=9-7i$를 전개하여 정리하면

$(x+3y)+(x-y)i=9-7i$

$x+3y=9,\ \ x-y=-7$

$x=-3,\ y=4$

$\therefore x^2+y^2=25$

23. [출제의도] 나머지 정리 이해하기

x^3+ax^2+8x+1을 $x+2,\ x-1$로 나눈 나머지가 같으므로

$-8+4a-16+1=1+a+8+1$

$\therefore\ a=11$

24. [출제의도] 분모의 유리화와 이중근호 계산하기

$a+\dfrac{b}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{6-4\sqrt{2}}$

$a+\dfrac{b(2+\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$

$(2a+2b)+b\sqrt{2}=4-2\sqrt{2}$

$a=4,\ \ b=-2$ ($\because a, b$가 유리수)

$\therefore 2a-b=10$

25. [출제의도] 무리수의 제곱수가 될 조건 구하기

$\sqrt{45n}=\sqrt{3^2\times5\times n}$가 자연수가 될 조건은 $3^2\times5\times n$이 제곱수가 되어야 하므로

$n=5,\ 5\times2^2,\ 5\times3^2,\ 5\times4^2,\ \cdots$

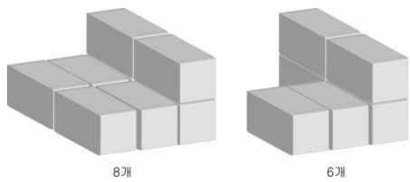
$36-n$은 제곱수이어야 하므로 두 조건을 만족하는 n의 값은 20이다.

주방의 가로길이는 $\sqrt{36-20}=4$,

세로길이는 $\sqrt{45\times20}-4=26$

$\therefore$ 주방의 넓이$=104$

26. [출제의도] 실생활과 관련된 수학 외적 문제 해결하기



추측할 수 있는 최대의 상자 수 $M=8$, 최소의 상자 수 $m=6$이므로 $M+m=14$이다.

27. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 식의 값 구하기

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=10$

$xy=-1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=36$

28. [출제의도] 집합의 원소의 개수 구하기

학생 전체 집합을 U, 한국 대 토고 전을 시청하겠다는 학생들 집합을 A, 프랑스 대 스위스 전을 시청하겠다는 학생들 집합을 B라 하자

즉, $n(U)=40,\ n(A)=35,\ n(B)=25$이고

$n(A^C\cap B^C)=2$이므로 $n(A\cup B)=38$이다.

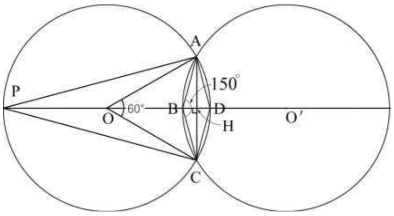
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\qquad =35+25-n(A\cap B)=38$

따라서 $n(A\cap B)=22$

$\therefore n(A)-n(A\cap B)=13$

29. [출제의도] 원주각과 중심각의 관계와 삼각비를 활용하고 삼각형의 넓이 구하기



점 O 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\angle ABC = \angle ADC = 150°$ 이므로

$\angle AOC = 60°$ 이다. ($\because \angle APC = 30°$)

따라서 $\triangle AOC$ 가 정삼각형이다.

$\triangle APC$ 의 넓이가 최대가 되려면 밑변 $\overline{AC}$ 의 길이가 일정하므로 높이가 최대이어야 한다. 즉, 점 P 가 $\overline{OH}$ 의 연장선 위에 있을 때, 높이 $\overline{PH}$ 가 최대가 되므로 $\overline{PH} = \overline{OP} + \overline{OH} = 10 + 5\sqrt{3}$

$\therefore \triangle APC$ 의 최대 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times (10 + 5\sqrt{3}) \\ &= 50 + 25\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $a + b = 75$

30. [출제의도] 비례식을 이용하여 실생활과 관련된 수학 외적 문제 해결하기

소형차와 중형차의 연료 탱크의 용량을 각각 $3x$, $4x$ 라 하고, 연비를 각각 ak, bk 라 하자.

(단, $x \neq 0, k \neq 0$)

$320km$ 주행 후 남은 연료량의 비는

$$\left(3x - \frac{320}{ak}\right) : \left(4x - \frac{320}{bk}\right) = 7 : 10$$

$$x = \frac{1600}{ak} - \frac{1120}{bk} \cdots ㉠$$

$400km$ 주행 후 남은 연료량의 비는

$$\left(3x - \frac{400}{ak}\right) : \left(4x - \frac{400}{bk}\right) = 2 : 3$$

$$x = \frac{1200}{ak} - \frac{800}{bk} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a : b = 5 : 4 \quad \therefore ab = 20$