2007학년도 11월 고1 전국연합학력평가 문제지

수리 영역

제 2 교시 | 성명 | 수험번호 | 1 | *1*

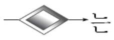
○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

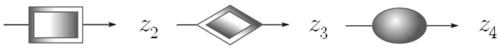
1. $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$ 일 때, a^2+b^2의 값은? [2점]

① 10
② $6\sqrt{3}$
③ 12
④ $8\sqrt{3}$
⑤ 14

2. 실수 a, b에 대하여 $|a|=a$, $|ab|=-ab$를 만족시킬 때, $|a-b|+\sqrt{a^2}+\sqrt{(b-a)^2}$ 을 간단히 하면? [2점]

① a
② $a+2b$
③ $a-2b$
④ $3a+2b$
⑤ $3a-2b$

3. 0이 아닌 임의의 복소수를 변환시키는 세 종류의 변환장치가 있다. 는 덧셈에 대한 역원, 는 곱셈에 대한 역원, 는 켤레복소수로 각각 변환시킨다. 복소수 z_1이 그림과 같은 순서대로 변환될 때, $z_2=1+i$ 이면 $\dfrac{z_1}{z_4}$의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]



① -2
② -1
③ 2
④ $\dfrac{1-i}{2}$
⑤ $\dfrac{-1-i}{2}$

4. 두 집합 $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여 $B\cup X=B$, $n(A\cap X)=2$를 만족시키는 집합 X의 개수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.) [3점]

① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

5. 세 집합 A, B, C에 대하여

$$A=\{x\,|\,x^2-4x-12<0\}$$
$$B=\{x\,|\,x^2-8x+16>0\}$$
$$C=\{x\,|\,x^2-2x+10\leq 0\}$$

일 때, $(A\cap B)\cup C$의 원소 중 정수의 개수는? [3점]

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

6. 다음은 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ 일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, $ab\neq 0$, $a+b\neq 0$)

> $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ 을 통분하여 정리하면
>
> $(a+b)(b-a)=\boxed{\text{(가)}}$
>
> $a^2+ab-b^2=0$
>
> 양변을 b^2 으로 나누면 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}-1=0$
>
> $\therefore\ \dfrac{a}{b}=\boxed{\text{(나)}}$
>
> 따라서 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\boxed{\text{(다)}}$

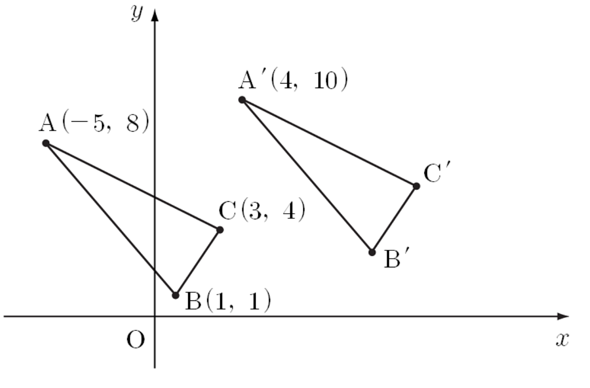
이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	ab	$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\pm\sqrt{5}$
②	ab	$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\pm\sqrt{5}$
③	ab	$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$	-1
④	$-ab$	$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	1
⑤	$-ab$	$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$	-1

7. 등식 $x^3+x^2-8x+7=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 다항식 ax^2-bx-c를 $x-2$로 나눈 나머지는? [3점]

① 15
② 17
③ 19
④ 21
⑤ 23

8. 그림의 삼각형 A′B′C′ 은 삼각형 ABC를 평행이동한 도형이다. 두 점 B′, C′을 지나는 직선의 방정식이 $ax+by=24$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

9. 네 부등식

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 18,\ 2x+y \leqq 10$$

을 동시에 만족시키는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $x+y$의 최대값은? [3점]

① 6
② 7
③ 8
④ 9
⑤ 10

10. 원점에 대하여 대칭이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식을 <보기>에서 모두 고르면? [3점]

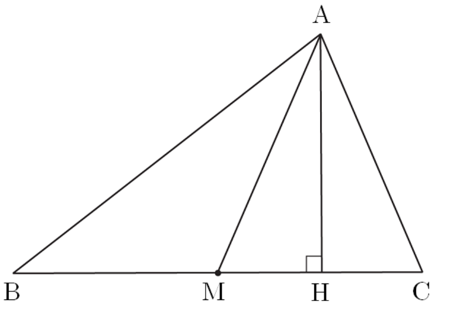
〈보 기〉

ㄱ. $y=-x$
ㄴ. $|x+y|=1$
ㄷ. $x^2+y^2=2(x+y)$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$이 성립함을 증명한 것이다.

[증명]
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2$

$=(\boxed{\text{(가)}})^2+\overline{AH}^2$

$=\overline{BM}^2+2\overline{BM}\cdot\overline{MH}+(\boxed{\text{(나)}})^2$ …… ㉠

직각삼각형 AHC에서

$\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$

$=(\boxed{\text{(다)}})^2+\overline{AH}^2$

$=\overline{CM}^2-2\overline{CM}\cdot\overline{MH}+(\boxed{\text{(나)}})^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$이다.

이 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\overline{BC}+\overline{CH}$	$\overline{AM}$	$\overline{BH}-\overline{BM}$
②	$\overline{BC}+\overline{CH}$	$\overline{AH}$	$\overline{BH}-\overline{BM}$
③	$\overline{BM}+\overline{MH}$	$\overline{AM}$	$\overline{BH}-\overline{BM}$
④	$\overline{BM}+\overline{MH}$	$\overline{AH}$	$\overline{CM}-\overline{MH}$
⑤	$\overline{BM}+\overline{MH}$	$\overline{AM}$	$\overline{CM}-\overline{MH}$

12. 음이 아닌 실수 a, b에 대하여 연산 $\triangle$를 $a \triangle b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 로 정의할 때, $(x^2 \triangle 4) + (y^2 \triangle 1) \leqq 6$ 을 만족시키는 점 (x, y)가 좌표평면 위에 나타내는 영역의 넓이는? [3점]

① 18
② 20
③ 25
④ 36
⑤ 50

13. <보기>의 명제 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $a < b < 0$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
ㄴ. $a \geqq 0$ 또는 $b \geqq 0$ 이면 $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이다.
ㄷ. $|a| + |b| \geqq |a+b|$ 이면 $a \geqq 0$ 이고 $b \geqq 0$ 이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 다음은 방정식 $x^3 + y^3 = 91$ 을 만족시키는 해 중에서 $xy < 0$ 인 두 정수 x, y의 값을 구하는 과정의 일부이다.

$x^3 + y^3 = 91$ 의 좌변을 인수분해하면
$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 91$ …… ㉠
이 때, $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + (\boxed{\text{(가)}})y^2 > 0$ 이므로
㉠에서 $x+y$ 는 91의 양의 약수이다. …… ㉡
$x + y = k$ 라 놓으면
㉠에서 $k(k^2 - 3xy) = 91$ 이므로 $xy = \frac{1}{3}\left(k^2 - \frac{91}{k}\right)$
따라서, x, y는 이차방정식

$$t^2 - kt + \frac{1}{3}\left(k^2 - \frac{91}{k}\right) = 0$$ 의 두 실근이다.

판별식 $D = k^2 - \frac{4}{3}\left(k^2 - \frac{91}{k}\right) \geqq 0$ 에서

$$k^3 \leqq (\boxed{\text{(나)}}) \times 91 \text{ …… ㉢}$$

$xy < 0$ 이고 ㉡, ㉢을 만족하는 k의 값은 ($\boxed{\text{(다)}}$)이다.
…(생략)…

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{4}$	3	7
②	$\frac{1}{4}$	4	7
③	$\frac{3}{4}$	3	1
④	$\frac{3}{4}$	4	1
⑤	$\frac{3}{4}$	4	7

15. 절대값이 1보다 작은 세 실수 a, b, c에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $ab+1>a+b$

ㄴ. $ac+b>abc+1$

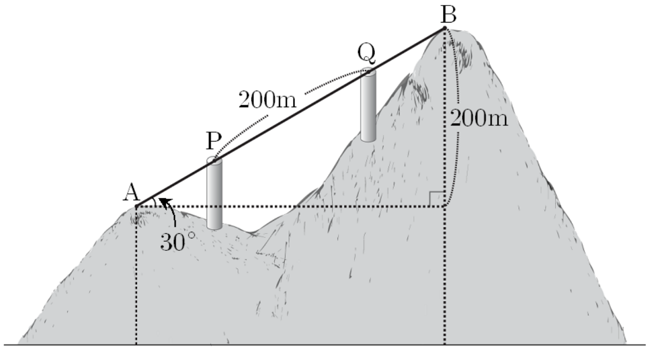
ㄷ. $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\geqq\frac{2}{(a+1)(b+1)}$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. $(x^2-x)(x^2+3x+2)-3$을 인수분해하면 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.) [4점]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

17. 그림과 같이 두 산봉우리 A, B지점을 직선으로 잇는 케이블을 설치하려고 한다. A, B의 높이 차는 200m이고, A에서 B를 올려다 본 각은 30°이다. 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P와 $n:m$으로 내분하는 점 Q에 각각 지지대를 설치했더니, P와 Q 사이의 거리가 200m가 되었다. 이 때, $\frac{n}{m}$의 값은? (단, 케이블의 늘어짐은 무시한다.) [4점]



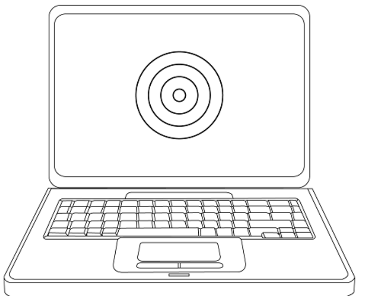
① $\frac{5}{3}$
② 2
③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{5}{2}$
⑤ 3

18. 원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$이 x축과 만나고, y축과 만나지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위는? [4점]

① $a>-2$
② $a\geqq-1$
③ $-1\leqq a<2$
④ $-2<a\leqq2$
⑤ $-2\leqq a<3$

19. 다음과 같이 작동하는 화면보호기 프로그램이 있다.

Ⅰ. 모니터 중앙에 반지름 1cm 인 원이 생기고, 그 원의 반지름은 1cm/초의 속도로 계속 커진다.
Ⅱ. 원이 생긴 후 2초마다 Ⅰ의 과정을 반복한다.
Ⅲ. 첫 번째 생겨서 커진 원의 넓이가 두 번째와 세 번째 생겨서 커진 두 원의 넓이의 합과 같아지면 모든 원은 화면에서 없어진다.
Ⅳ. 2초 후에 다시 Ⅰ~Ⅲ의 과정을 반복한다.



이 과정의 Ⅲ에서 첫 번째 원이 생겨서 없어지기까지 걸리는 시간은? [4점]

① 8초
② 9초
③ 10초
④ 11초
⑤ 12초

20. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은? (단, k는 실수이다.) [4점]

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{\sqrt{2}}{4}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\sqrt{2}$

21. 방정식 $[x]^2+[y^2]=1$ 을 만족시키는 점 $(x,\ y)$가 좌표평면 위에 나타내는 영역의 넓이는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

① $2(\sqrt{2}-1)$
② $2(2-\sqrt{2})$
③ $4(\sqrt{2}-1)$
④ $2(1+\sqrt{2})$
⑤ $2(2+\sqrt{2})$

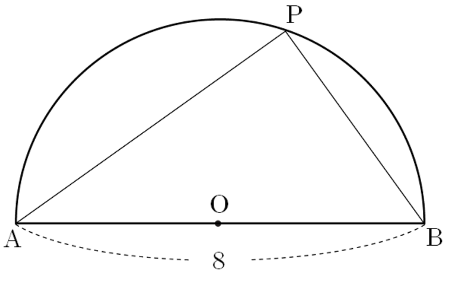
단 답 형

22. 명제 '$a \leqq x \leqq a+2$ 이면 $-3 \leqq x \leqq 5$이다.'가 참이 되게 하는 정수 a의 개수를 구하시오. [2점]

23. 두 점 $(3,\ 5)$, $(5,\ 3)$을 지나는 직선이 두 직선 $y=x$, $y=3x$와 만나는 교점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

24. 두 집합 $A=\{2,\ 3\}$, $B=\left\{\dfrac{a+b}{2},\ \sqrt{ab}\right\}$에 대하여 $A=B$일 때, $a+1$, $b+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+mx+n=0$이다. 이 때, $n-m$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양의 실수이다.) [3점]

25. 지름 AB의 길이가 8인 반원의 둘레 위에 한 점 P를 택할 때, $3\overline{\mathrm{AP}}+4\overline{\mathrm{BP}}$의 최대값을 구하시오. [4점]

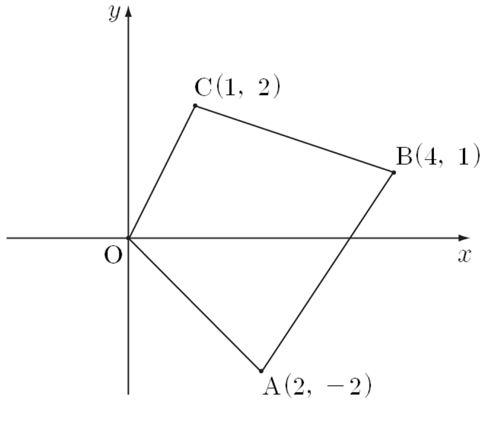


26. 실수 x, y에 대하여 $\langle x,\ y\rangle=\begin{cases} x & (x \geqq y) \\ -y & (x<y) \end{cases}$로 정의하자.

연립방정식 $\begin{cases} 2x-4y^2=\langle x,\ y\rangle \\ x-y+5=\langle x,\ y\rangle \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

27. $a^2+b^2+c^2=7$을 만족시키는 실수 a, b, c에 대하여 세 수 $a+b$, $b+c$, $c+a$의 평균은 $\frac{4}{3}$, 분산은 $\frac{n}{m}$이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로 소이다.) [4점]

28. 원점 O와 세 점 A$(2,\ -2)$, B$(4,\ 1)$, C$(1,\ 2)$를 꼭지점으로 하는 사각형 OABC의 둘레 위에 있는 임의의 점 $(x,\ y)$에 대하여 x^2+y^2-4x+4의 최대값을 M, 최소값을 m이라 할 때, $39(M-m)$의 값을 구하시오. [4점]



29. $a=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $b=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$일 때, $\sqrt{a^3+b^3+1}$을 간단히 하면 $p+2\sqrt{q}$이다. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

30. 200이하의 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=-1$을 만족시키는 n의 개수를 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$) [4점]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.