2008년도 9월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

정 답

1	③	2	④	3	⑤	4	②	5	④	6	②	7	②	8	③
9	⑤	10	①	11	②	12	①	13	⑤	14	⑤	15	①	16	④
17	①	18	④	19	③	20	③	21	④	22	74	23	63	24	34
25	11	26	27	27	48	28	24	29	56	30	676				

해 설

1. **[출제의도] 복소수의 사칙연산을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 분모를 통분하여 계산하면

$$\frac{1}{1+i}+\frac{i}{1-i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}+\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{1-i}{2}+\frac{i-1}{2}$$
$$=0$$

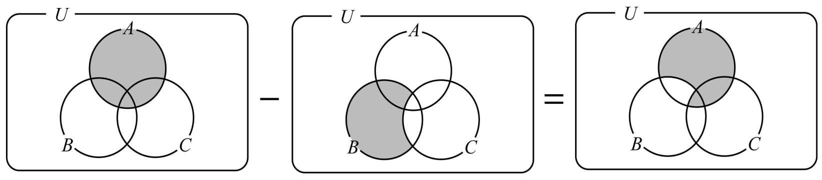
2. **[출제의도] 이차방정식의 근을 구하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,
 이차방정식의 근과 계수의 관계에서
 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$
 $\therefore\ \alpha+\dfrac{3}{\alpha}=\alpha+\beta=2$
 [별해]
 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 에서
 $x=1\pm\sqrt{1^2-3}=1\pm\sqrt{2}\,i$
 $\alpha=1+\sqrt{2}\,i$ 일 때,
 $\dfrac{3}{\alpha}=\dfrac{3}{1+\sqrt{2}\,i}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}\,i)}{(1+\sqrt{2}\,i)(1-\sqrt{2}\,i)}=\dfrac{3(1-\sqrt{2}\,i)}{3}=1-\sqrt{2}\,i$
 $\alpha=1-\sqrt{2}\,i$ 일 때, 같은 방법으로 $\dfrac{3}{\alpha}=1+\sqrt{2}\,i$
 $\therefore\ \alpha+\dfrac{3}{\alpha}=(1+\sqrt{2}\,i)+(1-\sqrt{2}\,i)=2$

3. **[출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
$$2x^2-x+9=2(x-1)^2+a(x-1)+b$$
$$=2(x^2-2x+1)+ax-a+b$$
$$=2x^2+(-4+a)x+2-a+b$$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로 각 항의 계수를 비교하면
 $-4+a=-1$, $2-a+b=9$
 두 식을 연립하여 풀면
 $\therefore\ a=3$, $b=10$
 따라서 $b-a=7$ 이다.
 [별해1]
 등식 $2x^2-x+9=2(x-1)^2+a(x-1)+b$ 에
 $x=0$ 을 대입하면, $9=2-a+b$
 $\therefore\ b-a=7$
 [별해2]
 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrl}
1 & 2 & -1 & 9 \\
 & & 2 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 1 & \boxed{10}=b \\
 & & 2 & \\ \hline
 & 2 & \boxed{3}=a &
\end{array}$$

 $\therefore\ a=3$, $b=10$
 따라서 $b-a=7$ 이다.

4. **[출제의도] 벤 다이어그램의 표시된 부분을 집합의 연산기호를 이용하여 표현할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 주어진 벤 다이어그램의 어두운 부분의 임의의 원소 x 는
 $x\in A$ 이고, $x\notin(B-C)$ 이다.



A $B-C$ $A-(B-C)$

 따라서 어두운 부분을 나타내는 집합은 $A-(B-C)$ 이다.

5. **[출제의도] 미지수가 2개인 연립이차방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 $\begin{cases} x-y=3 & \cdots ㉠ \\ x^2-y^2=15 & \cdots ㉡ \end{cases}$
 ㉡에서 $(x+y)(x-y)=3(x+y)=15$
 $\therefore\ x+y=5\ \cdots$ ㉢
 ㉠+㉢에서 $2x=8$ $\therefore\ x=4$
 $x=4$ 를 ㉠에 대입하면 $y=1$
 $\therefore\ \alpha=4$, $\beta=1$
 따라서 $\alpha\beta=4$ 이다.

6. **[출제의도] 절댓값을 포함한 부등식의 해가 주어져 있을 때 미지수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 $|4x+2|-1\le k \iff |4x+2|\le k+1$
 $\iff -k-1\le 4x+2\le k+1$
 $\iff -k-3\le 4x\le k-1$
 $\iff \dfrac{-k-3}{4}\le x\le\dfrac{k-1}{4}$
 이 부등식의 해가 $-2\le x\le 1$ 이므로
 $\dfrac{-k-3}{4}=-2$, $\dfrac{k-1}{4}=1$ $\therefore\ k=5$

7. **[출제의도] 다항식의 나눗셈을 이해하고 이를 식으로 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.**
 다항식 $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눌 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$ 에서 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ 이다. 여기서 $R(x)$ 의 차수는 $g(x)$ 의 차수보다 작다.
 ㄱ. $f(x)-R(x)=g(x)Q(x)$ 이므로
  $f(x)-R(x)$ 는 $g(x)$ 로 나누어 떨어진다. ∴참
 ㄴ. $f(x)+g(x)=g(x)\{Q(x)+1\}+R(x)$
  $f(x)+g(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 $R(x)$ 이다. ∴참
 ㄷ. (반례) $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x^2-1$ 이면 $Q(x)=x$, $R(x)=x+1$
  ∴거짓
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8. **[출제의도] 집합과 관련된 명제에서 충분조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**
 ㄱ. 명제 $p\to q$ 가 거짓이다.
  (반례) $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5\}$
  ∴ 충분조건이 아니다.
 ㄴ. 명제 $p\to q$ 가 거짓이다.
  (반례) $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$
  ∴ 충분조건이 아니다.
 ㄷ. 명제 $p\to q$ 는 참이다.
  (증명) $A=B^C$ 이면, $A\cup B=B^C\cup B=U$
  ∴ 충분조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 충분조건인 것은 ㄷ이다.

9. [출제의도] 최대공약수와 최소공배수를 이해하여 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $P(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

(다)에서 $P(x)R(x)$ 는 사차식이고 완전제곱식이 없으므로 두 다항식 $P(x)$, $R(x)$ 는 서로소이다.

그러므로 $R(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖지 않는다.

(나)에서 $R(x)$ 는 $(x-1)(x+2)(x+3)$ 의 약수이다.

$\therefore\ R(x)=(x+2)(x+3)$

$R(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $R(1)=(1+2)(1+3)=12$

따라서 구하는 나머지는 12 이다.

10. [출제의도] 도형의 성질을 이해하고 주어진 부분의 넓이를 다항식으로 표현할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사각형 ABFE 의 넓이 : a^2

사각형 GFCH 의 넓이 : $(b-a)^2$

사각형 IJHD 의 넓이 : $\{a-(b-a)\}^2=(2a-b)^2$ 이므로

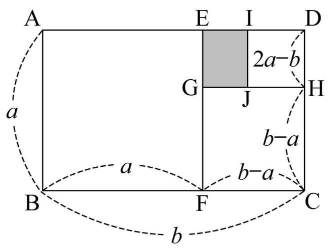
사각형 EGJI 의 넓이는

$ab-\{a^2+(b-a)^2+(2a-b)^2\}$

$=ab-\{a^2+b^2-2ab+a^2+4a^2-4ab+b^2\}$

$=ab-(6a^2+2b^2-6ab)$

$=-6a^2+7ab-2b^2$



[별해]

그림에서

$\overline{FC}=\overline{CH}=b-a$

$\overline{IJ}=\overline{JH}=\overline{DH}=a-(b-a)=2a-b$

$\overline{GJ}=(b-a)-(2a-b)=-3a+2b$

구하는 사각형 EGJI 의 넓이는

$\overline{GJ}\times\overline{IJ}=(2a-b)(-3a+2b)$

$\quad=-6a^2+7ab-2b^2$

11. [출제의도] 이차부등식의 해를 구하여 주어진 조건을 만족하는 미지수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$ 이므로

$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{1}{8}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=a\left(x^2-\frac{5}{8}x+\frac{1}{16}\right)$ (단, $a>0$)

$\quad=ax^2-\frac{5}{8}ax+\frac{1}{16}a$

$\therefore\ b=-\frac{5}{8}a\ ,\ c=\frac{1}{16}a$

$cx^2+bx+a\leqq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{16}ax^2-\frac{5}{8}ax+a\leqq 0$

$\quad\Leftrightarrow\ a(x-2)(x-8)\leqq 0$

$\quad\Leftrightarrow\ 2\leqq x\leqq 8$

따라서 정수 x 의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 의 7 개다.

12. [출제의도] 그래프로 나타내어진 자료로부터 주어진 자료들의 분산의 대소 관계를 추측할 수 있는가를 묻는 문제이다.

세 학급의 현장 체험 일수의 평균은

A 학급의 평균 : $\frac{1\times4+2\times6+3\times10+4\times6+5\times4}{30}=3$

B 학급의 평균 : $\frac{1\times6+2\times6+3\times6+4\times6+5\times6}{30}=3$

C 학급의 평균 : $\frac{1\times10+2\times4+3\times2+4\times4+5\times10}{30}=3$

즉, 세 학급의 평균은 모두 3 이다.

세 학급 A , B , C 의 현장 체험 일수의 분산 V(A) , V(B) , V(C) 는

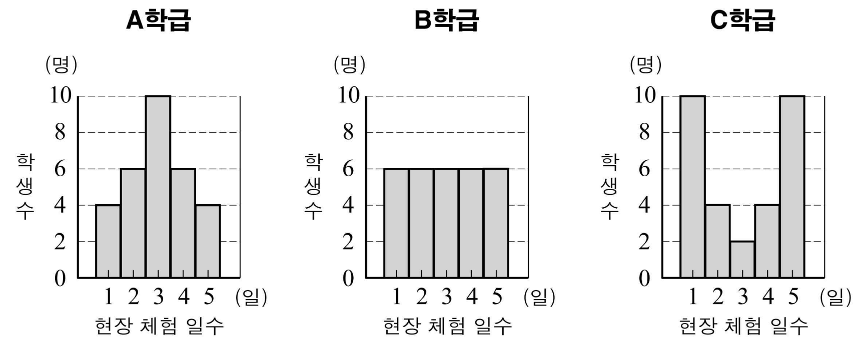
$V(A)=\frac{(-2)^2\times4+(-1)^2\times6+0^2\times10+1^2\times6+2^2\times4}{30}=\frac{22}{15}$

$V(B)=\frac{(-2)^2\times6+(-1)^2\times6+0^2\times6+1^2\times6+2^2\times6}{30}=2$

$V(C)=\frac{(-2)^2\times10+(-1)^2\times4+0^2\times2+1^2\times4+2^2\times10}{30}=\frac{44}{15}$

$\therefore\ V(A)<V(B)<V(C)$

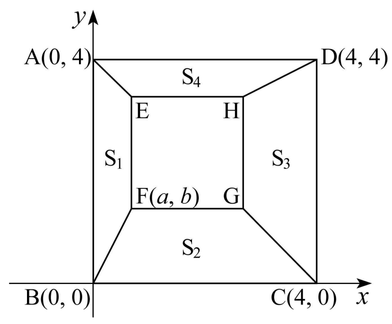
[별해]



그래프에서 세 자료의 평균은 모두 3 으로 같고, 변량의 분포가 평균의 주위에 밀집되어 있을수록 분산이 작으므로 세 학급의 분산은 C 학급이 가장 크고, A 학급이 가장 작음을 알 수 있다.

$\therefore\ V(A)<V(B)<V(C)$

13. [출제의도] 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.



사각형 ABCD를 점 B를 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓으면,

$A(0,4)$, $C(4,0)$, $D(4,4)$ 이고

점 F 의 좌표를 (a,b) 라 하면, (단, $0<a<2$, $0<b<2$)

$E(a,b+2)$, $G(a+2,b)$, $H(a+2,b+2)$ 이다.

ㄱ. $\overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\{a^2+(b-2)^2\}+\{(a-2)^2+b^2\}$

$\overline{BF}^2+\overline{DH}^2=(a^2+b^2)+\{(a-2)^2+(b-2)^2\}$

$\therefore\ \overline{AE}^2+\overline{CG}^2=\overline{BF}^2+\overline{DH}^2$ ∴참

ㄴ. $\overline{AE}=\overline{BF}$ 에서 $\overline{AE}^2=\overline{BF}^2$

$a^2+(b-2)^2=a^2+b^2$

$4b=4\quad\therefore\ b=1$

$\overline{CG}^2=(a-2)^2+b^2=(a-2)^2+1$

$\overline{DH}^2=(a-2)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+1$

$\therefore\ \overline{CG}=\overline{DH}$ ∴참

ㄷ. $S_1+S_3=\frac{1}{2}(4+2)\times\{a+(2-a)\}=6$

$S_2+S_4=\frac{1}{2}(4+2)\times\{b+(2-b)\}=6$

$\therefore\ S_1+S_3=S_2+S_4$ ∴참

14. [출제의도] 부등식의 성질을 이용하여 주어진 부등식이 절대부등식인지의 여부를 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\sqrt{a}\leqq\sqrt{a+b}\leqq\sqrt{a+b}+\sqrt{b}$ 이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\leqq\sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $b=0$ 일 때 성립한다.) ∴참

ㄴ. $\sqrt{a+b}\geqq 0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 0$ 이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}\geqq 0$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq\sqrt{a+b}$ (단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$ 일 때 성립한다.)

∴참

ㄷ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$, $\sqrt{2(a+b)} \geq 0$ 이므로

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+b+2\sqrt{ab})$

$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

∴ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.) ∴참

15. [출제의도] 자연수의 성질과 식의 성질을 이용하여 방정식에 관련된 명제의 증명과정을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$nk^2-n^2k+(n^3-2n-2)=0$ 에서

$n(k^2-nk+n^2-2)=2$ 이므로 n 은 2 의 약수이다.

따라서 $n=1$ 또는 $n=2$ 이다.

(1) $n=1$ 일 때 $k^2-k-3=0$ 에서 $k=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 이다.

그런데 주어진 등식을 만족시키는 k 는 무리수이므로 자연수가 아니다.

(2) $n=2$ 일 때 $k^2-2k+1=0$ 에서 $k=1$ 이다.

주어진 등식을 만족시키는 자연수 k 는 한 개이고 순서쌍 (n, k) 는 오직 한 개이다.

∴ (가) : k^2-nk+n^2-2 , (나) : 무리수, (다) : k^2-2k+1

16. [출제의도] 인수정리를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 사차방정식의 근을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사차식 x^4+ax^2+b 가 이차식 $(x-1)(x-\sqrt{2})$ 로 나누어 떨어지므로,

$x=1$, $x=\sqrt{2}$ 는 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ 의 근이다.

$x=1$, $x=\sqrt{2}$ 를 각각 $x^4+ax^2+b=0$ 에 대입하면

$a+b=-1$, $2a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$x^4+ax^2+b=x^4-3x^2+2$

$=(x^2-1)(x^2-2)=0$

$x^2-1=0$ 또는 $x^2-2=0$

∴ $x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 네 근의 곱은 2 이다.

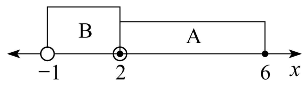
17. [출제의도] 집합의 연산과 이차부등식의 해에 관한 조건을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

집합 A 의 원소 x 의 범위는

$x^2-8x+12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) \leq 0$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$

한편, 주어진 조건 $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x \mid -1<x\leq 6\}$ 을 만족하도록 집합 B 의 범위를 수직선에 표시하면 그림과 같다.



∴ $B=\{x \mid -1<x<2\}$

$x^2+ax+b<0 \Leftrightarrow -1<x<2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)<0$

$\Leftrightarrow x^2-x-2<0$

∴ $a=-1$, $b=-2$

따라서 $a+b=-3$ 이다.

18. [출제의도] 유리식의 성질과 내분점의 개념을 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

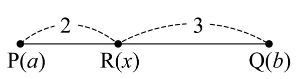
두 그릇 A , B 의 소금물을 섞을 때의 농도 x %는

$x=\dfrac{3a+2b}{300+200}\times 100=\dfrac{300a+200b}{300+200}=\dfrac{3a+2b}{5}$

세 점 P , Q , R 의 좌표가 각각 a , b , x 이고

$\dfrac{3a+2b}{5}=\dfrac{2b+3a}{2+3}$ 이므로

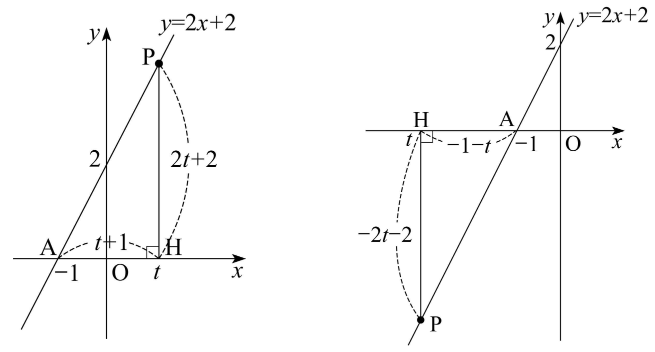
점 R 는 선분 PQ 를 2 : 3 으로 내분하는 점이다.



∴ $m : n=2 : 3$

따라서 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{3}$ 이다.

19. [출제의도] 주어진 조건을 이해하여 조건을 만족시키는 방정식의 해를 구하는 문제해결력을 묻는 문제이다.



$t>-1$ $\qquad$ $t<-1$

그림과 같이 점 P 의 x 좌표를 t 라 하면 y 좌표는 $2t+2$ 이므로

삼각형 PAH 의 넓이는

$t>-1$ 일 때 $\dfrac{1}{2}(t+1)(2t+2)=(t+1)^2$

$t<-1$ 일 때 $\dfrac{1}{2}(-1-t)(-2t-2)=(t+1)^2$ 이다.

즉, 삼각형 PAH 의 넓이는 $t\neq -1$ 일 때 $(t+1)^2$ 이다.

삼각형 PAH 의 넓이는 5 이므로

$(t+1)^2=5$, $t^2+2t-4=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터

구하는 점 P 의 x 좌표 α, β 의 곱 $\alpha\beta$ 는 -4 이다.

20. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 방정식과 부등식을 세워 방정식의 자연수 해를 구하는 문제해결력을 묻는 문제이다.

조건 (가)에서 $l=m-2$, $n=m+2$ 이고 조건 (나), (다)에 대입하면

$l+m+n=3m<200$ 이고 $\sqrt{3m}$ 은 자연수이다.

$3m$ 은 200 보다 작은 3 의 배수이고, 제곱수이므로

$3m=3^2$, 6^2 , 9^2 , 12^2 이다.

∴ $m=3$, 12 , 27 , 48

따라서 구하는 순서쌍은 (1, 3, 5) , (10, 12, 14) , (25, 27, 29) , (46, 48, 50) 의 4개다.

21. [출제의도] 실생활 문제에서 문제의 조건에 맞는 식을 세워 이차부등식의 해를 구하는 문제해결력을 묻는 문제이다.

세 지점 A , B , C 를 A 를 원점으로 하는 수직선 위에 놓으면

A(0) , B(−10) , C(20) 이다.

보관창고의 좌표를 t 라 하면 보관창고는 A 와 C 사이에 있으므로

$0<t<20$ $\quad$ …㉠

총 운송비는 $100t^2+200(t+10)^2+300(t-20)^2$ 이고

하루에 운송비가 155,000 원 이하이므로

$100t^2+200(t+10)^2+300(t-20)^2 \leq 155000$

$t^2+2(t+10)^2+3(t-20)^2 \leq 1550$

$6t^2-80t-150 \leq 0$

$3t^2-40t-75 \leq 0$

$(3t+5)(t-15) \leq 0$

∴ $-\dfrac{5}{3} \leq t \leq 15$ $\quad$ …㉡

㉠, ㉡에서 $0<t\leq 15$

즉, 보관창고는 A 지점에서 최대 15km 떨어진 지점까지 지을 수 있다.

22. [출제의도] 이중근호를 변형하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{12-2\sqrt{35}}=\sqrt{(7+5)-2\sqrt{7\cdot 5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

∴ $a=7$, $b=5$

따라서 $a^2+b^2=49+25=74$ 이다.

23. **[출제의도] 유리수와 무리수가 들어있는 식을 간단히 하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$$x=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3\sqrt{7}-1}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{(3\sqrt{7}-1)+1}{3\sqrt{7}-1}}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{3\sqrt{7}-1}{3\sqrt{7}}}=\frac{1}{\dfrac{3\sqrt{7}-(3\sqrt{7}-1)}{3\sqrt{7}}}=3\sqrt{7}$$

$\therefore\ x^2=(3\sqrt{7})^2=63$

[별해]

$3\sqrt{7}-1=t$ 로 치환하면

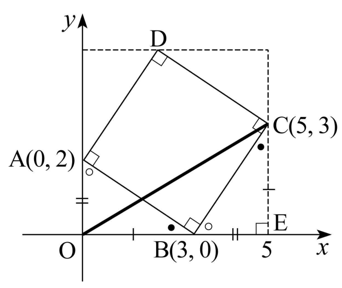
$$x=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{t}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{t+1}{t}}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{t}{t+1}}=\frac{1}{\dfrac{t+1-t}{t+1}}=t+1$$

$\therefore\ x=t+1=3\sqrt{7}$

따라서 $x^2=(3\sqrt{7})^2=63$ 이다.

24. **[출제의도] 주어진 도형을 조건에 맞게 좌표평면에 나타내고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**



그림에서 점 C 에서 x축 위에 내린 수선의 발을 E 라 하면

삼각형의 합동조건에 의해 $\triangle\mathrm{AOB}\equiv\triangle\mathrm{BEC}$ 이다.

그러므로 점 C 의 좌표는 (5, 3)

따라서 $\overline{\mathrm{OC}}^2=5^2+3^2=34$ 이다.

25. **[출제의도] 유리식이 포함되어 있는 등식에서 항등식의 성질을 이해하여 미정계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{ax(x+1)-b(x+1)-cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{(a-c)x^2+(a-b)x-b}{x^2(x+1)}$$

위 등식이 항등식이므로

$a-c=0,\ a-b=1,\ -b=-3$

세 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=3,\ c=4$

따라서 $a+b+c=11$ 이다.

26. **[출제의도] 복소수의 성질을 이해하고, 주어진 식의 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 에서 $\alpha^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\beta\ \cdots$ ㉠

$\alpha^3=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i\ \cdots$ ㉡

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1\ \cdots$ ㉢

㉠에서 $\alpha^m\beta^n=\alpha^m(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

㉡에서 $\alpha^m\beta^n=\alpha^{m+2n}=i$ 을 만족하는 $m+2n$ 의 값 중 최소인 자연수는 3 이고 ㉢에 의해 $m+2n$ 이 가질 수 있는 값은 $3, 15, 27, 39, \cdots$ 이다.

그런데 $m,\ n$은 각각 10 이하의 자연수이므로 $m+2n\leqq 30$이다.

$\therefore\ m+2n=3,\ 15,\ 27$

따라서 구하는 최댓값은 27 이다.

27. **[출제의도] 주어진 다항식을 전개하여 각 항의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

주어진 조건에서 $A=x^3+B$ 이므로,

$$\begin{aligned}A^3-B^3&=(x^3+B)^3-B^3\\&=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3\\&=x^9+3x^6B+3x^3B^2\end{aligned}$$

여기서, x^3의 항은 $3x^3B^2$에만 존재한다.

$3x^3B^2=3x^3(x+4)^2=3x^3(x^2+8x+16)$ 이므로

$3x^3B^2$의 x^3의 계수는 $3\times 16=48$ 이다.

따라서 구하는 x^3 의 계수는 48 이다.

28. **[출제의도] 평균과 표준편차의 정의와 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

평균이 5 이므로

$\dfrac{2+5+8+a+b}{5}=\dfrac{a+b+15}{5}=5\qquad \therefore\ a+b=10$

표준편차가 2 이면 분산은 4 이므로

$$\frac{(2-5)^2+(5-5)^2+(8-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{5}$$

$$=\frac{18+(a-5)^2+(b-5)^2}{5}=4$$

$a^2+b^2-10(a+b)+68=20$ 이다. $a+b=10$ 이므로 $\quad\therefore\ a^2+b^2=52$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서 $52=10^2-2ab$

따라서 곱 ab 의 값은 24 이다.

29. **[출제의도] 주어진 외적 관련 조건을 만족시키는 이차방정식을 구하여 그 해를 구하는 문제해결력을 묻는 문제이다.**

시속 x km로 달리는 자동차의 정지거리는

$\dfrac{3}{10}x+\left(\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{5}x+3\right)=\dfrac{1}{100}x^2+\dfrac{1}{10}x+3$ (m)이다.

주어진 조건에서

$\dfrac{1}{100}a^2+\dfrac{1}{10}a+3=40,\ a^2+10a-3700=0$

$\therefore\ a=-5\pm\sqrt{25+3700}=-5\pm\sqrt{3725}$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=-5+\sqrt{3725}$

주어진 제곱표에서 $61^2=3721,\ 62^2=3844$ 이므로

$\sqrt{3725}$ 에 가까운 정수는 61 이다.

따라서 a 에 가장 가까운 정수는 $-5+61=56$ 이다.

[별해]

$a^2+10a-3700=0$ 에서

$(a+5)^2=3725,\ a>0$ 이고 $a+5=\sqrt{3725}$ 이므로

$a+5$ 에 가까운 정수는 61 이다.

따라서 a 에 가장 가까운 정수는 $-5+61=56$ 이다.

30. **[출제의도] 산술평균과 기하평균 사이의 관계를 이용하여 최댓값을 구하는 문제해결력을 묻는 문제이다.**

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A\cap B=\{3, 4\}$에서

$$\begin{aligned}S(A)+S(B)&=S(A\cup B)+S(A\cap B)\\&=(1+2+\cdots+9)+(3+4)\\&=52\end{aligned}$$

(산술평균)≧(기하평균)에서

$\dfrac{S(A)+S(B)}{2}\geqq\sqrt{S(A)S(B)}$ (단, 등호는 $S(A)=S(B)$ 일 때 성립한다.)

$\dfrac{52}{2}\geqq\sqrt{S(A)S(B)}$

$\therefore S(A)S(B)\leqq 26^2=676$

등호는 $S(A)=S(B)=26$ 일 때 성립한다.

따라서 구하는 최댓값은 676 이다.

참고로 $A=\{2,3,4,8,9\},\ B=\{1,3,4,5,6,7\}$ 일 때, $S(A)=S(B)=26$ 이 되어 등호가 성립하는 경우가 존재한다.