수리 영역

정답

1	①	2	③	3	②	4	③	5	②
6	④	7	④	8	①	9	③	10	④
11	②	12	⑤	13	③	14	③	15	⑤
16	④	17	⑤	18	⑤	19	①	20	②
21	②	22	19	23	21	24	16	25	24
26	12	27	15	28	11	29	405	30	50

해설

1. [출제의도] 집합의 연산의 성질을 이용하여 계산하기

$A\cap B^C=\phi$이면 $A-B=\phi$ 이므로 $A\subset B$ 이다.

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$\overline{\alpha}=2+7i$, $\overline{\beta}=-1-4i$ 이므로

$$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})=(1-3i)(1+3i)=10$$

3. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$이다.

$(a-1)^2+4=(a-6)^2+9$

$-2a+5=-12a+45$

$\therefore a=4$

4. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 계산하기

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}$ 이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$ 이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$ 이므로 $a=-4, b=1$

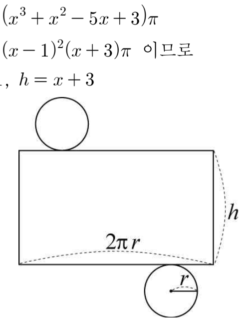
$\therefore a^2+b^2=17$

5. [출제의도] 인수분해를 이용하여 수학 내적문제 해결하기

원기둥의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

$$(\text{부피})=\pi r^2h=(x^3+x^2-5x+3)\pi=(x-1)^2(x+3)\pi$$ 이므로

$r=x-1$, $h=x+3$



$$(\text{겉넓이})=2\pi r^2+2\pi rh=2r(r+h)\pi=2(x-1)(2x+2)\pi=4(x^2-1)\pi$$

6. [출제의도] 집합의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ.$A=\{1\}$일 때, $S(A)=1$

$A=U$일 때, $S(A)=15$이므로 $1\le S(A)\le 15$이다. (참)

ㄴ.$A\cup B=B$이면

$A\subset B$이므로 $S(A)\le S(B)$이다. (거짓)

ㄷ.$S(A\cap B)=\dfrac{S(U)}{5}=3$, $S(A\cup B)=15$ 이므로 $S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=18$이다. (참)

7. [출제의도] 산술기하평균의 성질을 이용하여 최댓값 계산하기

$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$, 즉 $a^2+b^2\ge 2|ab|$

$c^2+d^2\ge 2\sqrt{c^2d^2}$, 즉 $c^2+d^2\ge 2|cd|$

$a^2+b^2=31$, $c^2+d^2=27$ 이므로

$|ab|\le\dfrac{31}{2}$, $|cd|\le\dfrac{27}{2}$

$\therefore -\dfrac{31}{2}\le ab\le\dfrac{31}{2}$, $-\dfrac{27}{2}\le cd\le\dfrac{27}{2}$

ab의 최댓값은 $\dfrac{31}{2}$, cd의 최댓값은 $\dfrac{27}{2}$이므로

$ab+cd$ 의 최댓값은 29이다.

8. [출제의도] 복소수의 상등 이해하기

$1-\sqrt{3}i$가 주어진 삼차방정식의 근이므로

$(1-\sqrt{3}i)^3+a(1-\sqrt{3}i)^2+b(1-\sqrt{3}i)-8=0$

$(-2a+b-16)-(2a+b)\sqrt{3}i=0$ 이고 a,b 가 실수이므로

$-2a+b-16=0$ ⋯①

$2a+b=0$ ⋯②

①,②를 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=8$

$\therefore a+b=4$

(별해)

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1-\sqrt{3}i$ 이면 $1+\sqrt{3}i$ 도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)+\alpha=-a$ ⋯①

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)+\alpha(1-\sqrt{3}i)+\alpha(1+\sqrt{3}i)=b$ ⋯②

$(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)\alpha=8$ ⋯③

①,②,③을 연립하여 풀면$\alpha=2$, $a=-4$, $b=8$

$\therefore a+b=4$

9. [출제의도] 필요충분조건을 이해하여 추론하기

ㄱ.($\Rightarrow$) x,y 가 0 이 아니므로 양변을 xy 로 나누면 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$이다.

($\Leftarrow$)양변에 xy 를 곱하면 $x+y=xy$ 이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄴ.($\Rightarrow$) $0<x<y$ 이면 $0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$이다.

($\Leftarrow$) $0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$ 이면 $0<x<y$이다.

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ.($\Rightarrow$) (반례) $x=2$, $y=2$, $z=1$

($\Leftarrow$) $x=y=z$이면 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다. (거짓)

10. [출제의도] 산술기하평균을 이용하여 수학 외적문제 해결하기

$\overline{\mathrm{BC}}=x$, $\overline{\mathrm{CD}}=y$라 하면 $xy=1200$ ⋯①

철수가 설치비용을 지불해야 하는 총금액은 $\left(\dfrac{3}{2}x+2y\right)k$ 이다.

$\left(\dfrac{3}{2}x+2y\right)k\ge\left(2\sqrt{3xy}\right)k=120k$ 이고

$\dfrac{3}{2}x=2y$ ⋯②

일 때 철수가 지불해야 하는 총비용이 최소가 된다.

①,②를 연립하여 풀면 $x=40$

$\therefore\overline{\mathrm{BC}}=40$

11. [출제의도] 유리식을 활용한 수학 외적문제 해결하기

천체 A,B사이의 거리를 r, 천체 C,D사이의 거리를 r', 천체 A,B 의 질량을 각각 m, M 라 하고 A,B 사이의 만유인력을 F라 하면

$\dfrac{2}{3}F=G\dfrac{2mM}{r'^2}$이고 $F=G\dfrac{mM}{r^2}$이므로

$\dfrac{2}{3}G\dfrac{mM}{r^2}=G\dfrac{2mM}{r'^2}$

$\dfrac{1}{3r^2}=\dfrac{1}{r'^2}$이므로 $r'^2=3r^2$ $\therefore r'=\sqrt{3}r$

12. [출제의도] 다항식의 최대공약수와 최소공배수의 성질 이해하기

두 다항식의 최대공약수를 G 라 하면 서로소인 두 다항식 a,b 가 존재하여 $f(x)=aG, g(x)=bG$ 이다. $(a+b)G=(2x-2)(x+5)$

$abG^2=x(x-2)(x+5)^2$ 이고 $f(1)=6$이므로

$f(x)=x(x+5)$, $g(x)=(x-2)(x+5)$

$\therefore g(3)=8$

13. [출제의도] 이항연산의 정의를 이용하여 추론하기

ㄱ.$(3,2)\otimes(2,-1)=(1,-2)$ (참)

ㄴ.집합 A에서 연산$\otimes$에 대한 항등원이 $(0,1)$이므로 $(-4,2)\otimes(x,y)=(0,1)$

$2x-4y=0, 2y=1$이므로 $(x,y)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ (참)

ㄷ.$(ab^2+a^2b, b^3)=(-a,-b)$

$b^2=-1$ 인 실수 b 는 존재하지 않는다. (거짓)

14. [출제의도] 연립방정식을 이용하여 수학 외적문제 해결하기

10 경기 결과 x 승, y 무, z 패라 하면

$x+y+z=10$ ⋯①

규정A 에 의한 점수 $x-z=3$ ⋯②

규정B 에 의한 점수 $3x+y=18$ ⋯③

①,②,③을 연립하여 풀면 $x=5, y=3, z=2$

이므로 규정C에 의한 갑의 점수는

$10+3-2=11$

15. [출제의도] 복소수의 연산에 관한 성질 이해하기

주어진 복소수 z 에 대하여

$(2z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2$

$4z^2+4z+1=-3$

$z^2+z+1=0$ 이므로 $z^3=1$ 이다.

따라서 $z^{2010}+\frac{1}{z^{2010}}=(z^3)^{670}+\frac{1}{(z^3)^{670}}=2$

16. [출제의도] 부등식의 성질 추론하기

ㄱ.$a=2, b=-1$ 이면 $a+b>0$ 이다. (거짓)

ㄴ.$(a-b)^2-(a+b)^2=-4ab>0$ 이면

$(a-b)^2>(a+b)^2$ 이므로 $|a-b|>|a+b|$ (참)

ㄷ.$\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{b}=\frac{-(a^2+b^2)}{ab}>0$ 이므로

$\frac{a-b}{a}>\frac{a+b}{b}$ (참)

17. [출제의도] 유리식의 성질 이해하기

주어진 정의에 의해

$\langle A, B\rangle=\frac{A-B}{AB}=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$ 이므로

$\langle x+2, x\rangle+\langle x+4, x+2\rangle+\langle x+6, x+4\rangle=\langle x+\alpha, x\rangle$

$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\alpha}$

정리하면

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\alpha}$ 이므로 $\alpha=6$

18. [출제의도] 이차방정식의 근의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ.이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 의 두 근을 α', β' 라 하면 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\alpha'\beta'=\frac{c}{a}$ 이므로 $\alpha\beta=\alpha'\beta'$ 이다. (참)

ㄴ.실수인 공통근 α가 존재한다고 하자.

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …①, $a\alpha^2+2b\alpha+c=0$ …②

② − ① 하면 $b\alpha=0$ 이고 $ac>0$ 이므로 $\alpha\neq 0$

따라서 $b=0$ 이다.

$\alpha^2=-\frac{c}{a}$이고 $ac>0$ 이므로 α 가 실수라는 조건에 모순이 된다. (참)

ㄷ.$ax^2+2bx+c=0$이 허근을 가지면 판별식 $4b^2-4ac<0$ 이므로 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $b^2-4ac\le 4b^2-4ac<0$ 이다. (참)

19. [출제의도] 다항식의 연산의 성질을 이용하여 추론하기

$x=\frac{b-c}{1+bc}$ 에서 $(1+bc)x=b-c$ 이고,

정리하면 $(bx+1)c=b-x$ … ①

같은 방법으로

$y=\frac{c-a}{1+ca}$ 에서 $(ay-1)c=-a-y$ … ②

①과 ②에서

$(a+y)(bx+1)c=(x-b)(ay-1)c$ … ③

(i) ③에서 $c\neq 0$이면

$(a+y)(bx+1)=(x-b)(ay-1)$ 이고 정리하면

$(ab+1)(x+y)=(a-b)(xy-1)$

$ab+1\neq 0$ 이므로 $x+y=\frac{a-b}{ab+1}(xy-1)$

$x+y+z=xyz$

(ii) ③에서 $c=0$ 이면

$x=b,\ y=-a,\ z=\frac{a-b}{1+ab}$ 이므로

$x+y+z=xyz$

따라서 $x=\frac{b-c}{1+bc},\ y=\frac{c-a}{1+ca},\ z=\frac{a-b}{1+ab}$ 일 때, $x+y+z=xyz$ 이다.

20. [출제의도] 이차방정식을 이용하여 수학외적문제 해결하기

갑과 을은 등속운동을 하고 6분 동안 갑이 간 거리는 60 이므로 갑의 속력은 10 이고 출발선에서 A지점까지의 거리는 360 이다.

30분 동안 을이 간 거리는 360 이므로 을의 속력은 12이다.

$\frac{x^2}{10}-\frac{10x}{12}=10$

$(x-15)(3x+20)=0$ 이므로 $x=15$

21. [출제의도] 복소수의 연산에 관한 성질 이해하기

$n=1,2,3,4,5,6$ 에 대하여

$z^1=2i,\ z^2=-4,\ z^3=-8i,\ z^4=16,\ z^5=32i,\ z^6=-64$ 이므로

말은 $n=2$일 때 4칸, $n=4$일 때 16칸, $n=6$일 때 64칸만큼 칸을 이동한다.

$100=64\times1+16\times2+4\times1$ 이므로 출발점에서 시작하여 주사위를 최소 4번 던지면 말이 100이 적혀있는 칸에 도착한다.

22. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 계산하기

$R_1=f(1)=1+a+3=4+a$

$R_2=f(-1)=1-a+3=4-a$

$R_1-R_2=2a=38$ 이므로 $a=19$

23. [출제의도] 절대부등식의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대해 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+5}$ 의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여

$(k+1)x^2-(k+1)x+5\ge 0$

i) $k=-1$ 일 때

$5\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립

ii) $k\neq -1$ 일 때

$k+1>0$이고 $D\le 0$ 이므로

$D=(k+1)^2-20(k+1)\le 0$

$k^2-18k-19=(k-19)(k+1)\le 0$

$-1<k\le 19$이다.

따라서 $-1\le k\le 19$ 이므로 정수 k의 개수는 21

24. [출제의도] 진리집합 사이의 관계 이해하기

$P=\{2,3,5,7\}$ 이고 명제 $\sim p\rightarrow q$ 가 참이기 위해서는 $P^C\subset Q$ 이다.

따라서$\{1,4,6,8,9,10\}\subset Q\subset U$ 를 만족하는 집합 Q 의 개수는 $2^4=16$

25. [출제의도] 비례식을 활용한 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:1, \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCD}, \angle\mathrm{B}$ 가 공통이므로 $\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CBD}$이고 닮음비는 $2:1$ 이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=16$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=8$ 이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\mathrm{x}$ 라 하면

$x+8:16=2:1$ $\therefore \overline{\mathrm{AD}}=24$

26. [출제의도] 부등식을 이용하여 수학 외적문제 해결하기

키가 1.5(m) 이고 체질량지수가 28 이므로

x(kg) 을 감량하여 정상체중이 되기 위해서는

$18.5\le 28-\frac{x}{(1.5)^2}<23$

$5\times1.5^2<x\le 9.5\times1.5^2$

$11.25<x\le 21.375$ 이므로 자연수 x 의 최솟값은 12

27. [출제의도] 인수분해를 이용하여 수학내적문제 해결하기

각 꼭짓점에 적힌 숫자를 a,b,c,d,e,f 라고 하자. 이 때 면에 적힌 수는 각각 abe, ade, acd, abc, bef, def, cdf, bcf이다.

$abe+ade+acd+abc+bef+\mathrm{def}+cdf+bcf$

$=(b+d)(a+f)(c+e)$

$=105$

$105=3\times5\times7$이므로

$a+b+c+d+e+f=3+5+7=15$

28. [출제의도] 내분점의 성질 이해하기

삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를

$\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ 라 하면

$\left(\frac{x_2+2x_1}{3}, \frac{y_2+2y_1}{3}\right)=(10, 8)$

$\left(\frac{x_3+3x_2}{4}, \frac{y_3+3y_2}{4}\right)=(5, -3)$

$\left(\frac{2x_1+3x_3}{5}, \frac{2y_1+3y_3}{5}\right)=(2, 12)$ 이고

$2x_1+x_2=30,\quad 3x_2+x_3=20,\quad 3x_3+2x_1=10$

이므로 $x_1+x_2+x_3=15$

$2y_1+y_2=24,\quad 3y_2+y_3=-12,\quad 3y_3+2y_1=60$

이므로 $y_1+y_2+y_3=18$이다. 따라서

$\mathrm{G}(a, b)=\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$=\mathrm{G}(5, 6)$

$\therefore a+b=11$

29. [출제의도] 연립방정식을 활용하여 수학외적문제 해결하기

$a>0, b\ge 0, c\ge 0$ 인 정수 a,b,c 에 대하여

$x=100a+10b+c$ 라 하면 $x$km 주행 후 계기판에 나타난 총 주행거리는

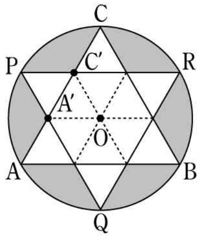
$1700+100a+10b+c$ 이고, 주유 후 주행거리는 $106.1+100a+10b+c$ 이다. 이 때, 총 주행거리의 숫자배열을 거꾸로 나열하면 주유 후 주행거리가 되므로 총 주행거리의 천의 자리 숫자는 1 이다.

$a=1$ 또는 $a=2$ 이고 $c=a+1$ 이므로 $c=2$ 또는 $c=3$ 이다. 따라서 $b=5$이다.

$x=152$ 또는 $x=253$

$\therefore 152+253=405$

30. [출제의도] 부등식의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기



삼각형 $\mathrm{PA'C'}$의 넓이가 최대가 될 때, 어두운 부분의 넓이가 최소가 된다. 삼각형 $\mathrm{PA'C'}$에서 $\overline{\mathrm{PA'}}=x$, $\overline{\mathrm{PC'}}=y$ 라 하면

$\triangle \mathrm{PA'C'}=\dfrac{1}{2}y\times x\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy$ 이고

산술기하평균 $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$에서 $x=y$ 일 때, 삼각형 $\mathrm{PA'C'}$의 넓이가 최대가 된다.

따라서 점 P,Q,R은 호 $\overset{\frown}{\mathrm{CA}},\overset{\frown}{\mathrm{AB}},\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$의 중점이 된다.

(어두운 부분의 넓이)

=(원의 넓이)-12$\triangle \mathrm{PA'C'}$

$=25\pi-12\times\dfrac{25\sqrt{3}}{12}$

$=25\pi-25\sqrt{3}$

$a=25, b=25$이므로 $a+b=50$