

2011학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

정답

1	①	2	②	3	④	4	③	5	④
6	③	7	②	8	③	9	⑤	10	③
11	①	12	②	13	③	14	⑤	15	④
16	①	17	⑤	18	①	19	②	20	④
21	⑤	22	10	23	3	24	5	25	29
26	13	27	128	28	7	29	39	30	7

해설

1. [출제의도] 복소수의 사칙 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(1+2i)(2-i) = 2-i+4i+2 = 4+3i$$

2. [출제의도] 무리식의 연산을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+x)}{x}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{x}$$

$$= \frac{1-x^2}{x}$$

이 식에 $x = \sqrt{2}$ 를 대입하면

$$\frac{1-x^2}{x} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x) = x^7 + 27x^4 - x + k$ 라 할 때 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 12이므로 나머지정리에 의해 $f(-1) = 12$ 이다.

$$f(x) \text{에 } x = -1 \text{을 대입하면}$$

$$-1 + 27 + 1 + k = 12$$

$$\therefore k = -15$$

4. [출제의도] 실수의 성질을 이용하여 유리수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$3a + (a-b)\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + b - 2$$

좌변으로 이항하면

$$3a + a\sqrt{2} - b\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - b + 2 = 0$$

정리하면

$$3a - b + 2 + (a-b-4)\sqrt{2} = 0$$

무리수가 서로 같기 위하여

$$3a - b + 2 = 0, \quad a - b - 4 = 0 \text{ 이므로}$$

$$3a - b = -2, \quad a - b = 4$$

이를 연립하여 풀면

$$a = -3, \quad b = -7$$

$$\therefore ab = 21$$

5. [출제의도] 절댓값을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$-2 < a < 1$ 일 때, $a+3 > 0$ 이므로 $|a+3| = a+3$
 또, $a-2 < 0$ 이므로 $|a-2| = -a+2$
 따라서

$$|a+3| + |a-2|$$

$$= a+3 - a+2$$

$$= 5$$

6. [출제의도] 세 실수의 대소 관계를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

조건 (가)에서

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{c} \text{ 이고 } a, c \text{가 양수이므로 } c < a \text{이다.}$$

마찬가지로 조건 (나)에서

$$\frac{1}{a} > 0 \text{ 이고 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \text{ 에서 } \frac{1}{c} < \frac{1}{b} \text{ 이다.}$$

따라서 b, c 가 양수이므로 $b < c$ 에서 $b < c < a$ 이다.

[다른 풀이]

(가)에서 $\frac{1}{a} - \frac{1}{c} < 0$ 이고 a, c 가 양수이므로 $ac > 0$ 이

다. 그러므로 $c - a = ac\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) < 0$ 가 되어 $c < a$...㉠

(나)에서 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 이고 a, b, c 가 양수이므로

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \text{ 이고, } bc > 0.$$

그러므로 $c - b = bc\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) > 0$ 가 되어 $c > b$...㉡

㉠, ㉡에 의해 $b < c < a$ 이다.

7. [출제의도] 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 다항식 A 와 B 의 최대공약수를 G 라 하고, 두 다항식 A 와 B 의 최소공배수를 L 이라고 하면

$$AB = LG \text{ 이므로 } AB = (x+1)^2 x^5$$

따라서 AB 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 몫은 x^5 이다.

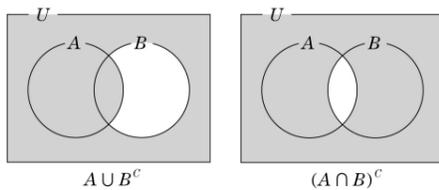
[참고]

두 다항식 A 와 B 의 최대공약수를 G 라 하면 서로소인 두 다항식 a, b 에 대하여 $A = aG, B = bG$ 라고 할 수 있다.

이때, 두 다항식의 곱 AB 는 $AB = abGG$ 이고 최소공배수 L 은 $L = abG$ 이므로 $AB = LG$ 이다.

8. [출제의도] 집합의 포함 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 집합 $A \cup B^C, (A \cap B)^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. (참) 위의 벤 다이어그램이 나타내는 집합을 보면 두 집합의 합집합이 전체집합과 같음을 알 수 있다. 따라서

$$U = (A \cup B^C) \cup (A \cap B)^C$$

$$= \{2, 4, 5, 8, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12\}$$

ㄴ. (거짓) 위의 벤 다이어그램에서

$$A \cap B = (A \cup B^C) - (A \cap B)^C \text{이 성립함을 알 수 있다.}$$

따라서

$$A \cap B$$

$$= \{2, 4, 5, 8, 12\} - \{1, 3, 5, 9\}$$

$$= \{2, 4, 8, 12\}$$

ㄷ. (참) 드 모르간의 법칙에 의해

$$A^C \cap B = (A \cup B^C)^C \text{ 이므로}$$

$$A^C \cap B$$

$$= (A \cup B^C)^C$$

$$= U - \{2, 4, 5, 8, 12\}$$

$$= \{1, 3, 9\}$$

따라서 집합 $A^C \cap B$ 의 원소의 개수는 3이다.

이상에서 ㄱ과 ㄷ이 참이다.

[참고]

전체집합을 집합의 연산으로 구해보자.

$$(A \cup B^C) \cup (A \cap B)^C$$

$$= (A \cup B^C) \cup (A^C \cup B)$$

$$= (A \cup A^C) \cup (B^C \cup B)$$

$$= (A \cup A^C) \cup B^C$$

$$= U \cup B^C$$

$$= U$$

9. [출제의도] 이항 연산의 정의에 따라 주어진 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연산의 정의에 의해

$$x \odot 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x \odot 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

이므로

$$(x \odot 1) \odot \left(\frac{1}{x \odot 1}\right)$$

$$= \left(\frac{x+1}{x-1}\right) \odot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$$

여기서 분모, 분자를 각각 통분하여 정리하면

$$\frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2}{4x}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2x}$$

[다른 풀이]

$$(x \odot 1) \odot \left(\frac{1}{x \odot 1}\right)$$

$$= \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$$

이므로 분모 분자에 $(x+1)(x-1)$ 을 곱하면

$$\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}\right) \times (x+1)(x-1)$$

$$\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) \times (x+1)(x-1)$$

$$= \frac{x+1}{x-1}(x+1)(x-1) + \frac{x-1}{x+1}(x+1)(x-1)$$

$$= \frac{x+1}{x-1}(x+1)(x-1) - \frac{x-1}{x+1}(x+1)(x-1)$$

$$= \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2}{4x}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2x}$$

10. [출제의도] 이항 연산의 성질과 역원에 대하여 알고 있는가를 묻는 문제이다.

집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 의 임의의 두 원소 a, b 에 대하여 $a \triangle b$ 를 표로 나타내면 아래와 같다.

\triangle	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

ㄱ. (참) 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 의 임의의 두 원소 a, b 에 대하여

$$a \triangle b = (ab \text{를 } 4 \text{로 나눈 나머지})$$

$b \triangle a = (ba \text{를 } 4\text{로 나눈 나머지})$

그런데 실수의 성질에 의해 $ab=ba$ 이므로 ab 를 4로 나눈 나머지와 ba 를 4로 나눈 나머지는 같다.
 \therefore 교환법칙이 성립한다.

ㄴ. (거짓) 항등원을 e 라 하면 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 의 임의의 원소 a 에 대하여 다음이 성립한다.

$$a \triangle e = a$$

그런데 ae 를 4로 나눈 나머지가 항상 a 가 되려면

$e=1$ 이어야 한다.

\therefore 연산 \triangle 에 대한 항등원은 1이다.

ㄷ. (참) 3의 역원을 x 라 하면 항등원은 1이므로 $3 \triangle x = 1$ 이다.

그런데 $3 \triangle 3 = (3 \times 3 \text{를 } 4\text{로 나눈 나머지})$

이므로 $3 \times 3 = 9$ 이고 9를 4로 나눈 나머지는 1이다. 그러므로 $3 \triangle 3 = 1$ 에서 $x=3$ 이다.

\therefore 3의 역원은 3이다.

이상에서 ㄱ과 ㄷ이 참이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 표에서 연산의 결과가 대각선을 기준으로 서로 대칭이므로 교환법칙이 성립함을 알 수 있다.

11. [출제의도] 비례식을 이용하여 유리식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{x+y}{2z} = \frac{y+2z}{x} = \frac{2z+x}{y} = k \text{라 하자. 그러면}$$

$$x+y = 2zk \quad \text{㉠}$$

$$y+2z = xk \quad \text{㉡}$$

$$2z+x = yk \quad \text{㉢}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(x+y+2z) = k(x+y+2z)$$

조건에서 $x+y+2z \neq 0$ 이므로 양변을 $x+y+2z$ 로 나누면 $k=2$

㉠-㉡을 하면

$$x-2z = 2(2z-x) \text{이므로 } 2z = x \quad \text{㉣}$$

㉡-㉢을 하면

$$y-x = 2(x-y) \text{이므로 } x=y \quad \text{㉤}$$

㉣, ㉤에서 $x=y=2z$

$$\therefore \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = \frac{17z^3}{4z^3} = \frac{17}{4}$$

12. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$z = a+bi$ (단, a, b 는 실수)라 하자. 그러면 켈레복소수 \bar{z} 는 $\bar{z} = a-bi = a-bi$

주어진 식에 대입하면

$$(2+i)(a+bi) + 3i(a-bi) = 2+6i$$

실수부와 허수부로 나누어 정리하면

$$(2a+2b) + i(4a+2b) = 2+6i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의해

$$2a+2b = 2 \quad \text{㉠}$$

$$4a+2b = 6 \quad \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-2a = -4 \quad \therefore a = 2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$4+2b = 2 \quad \therefore b = -1$$

그러므로 구하는 복소수 z 는 $z = 2-i$ 이다.

$$\therefore z\bar{z} = (2-i)(2+i) = 4+1 = 5$$

13. [출제의도] 명제의 참과 거짓을 바르게 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

조사에서 얻은 결과를 명제라 하고 다음 각 조건 p, q, r, s 를 아래와 같이 정하기로 하자.

- p : 10대, 20대에게 선호도가 높다.
- q : 판매량이 많다.
- r : 가격이 싸다.
- s : 기능이 많다.

그러면 (가), (나), (다)를 다음과 같이 나타낼 수

있다.

- (가) $p \Rightarrow q$
- (나) $r \Rightarrow q$
- (다) $s \Rightarrow p$

위의 결과로부터 추론할 수 있는 사실은

(다) $s \Rightarrow p$ 와 (가) $p \Rightarrow q$ 에서 $s \Rightarrow q$ 이다.

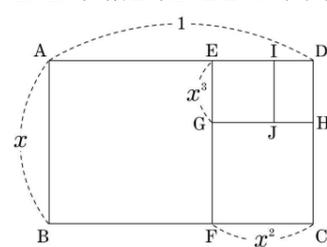
그런데 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 대우명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다. 그러므로 $\sim q \Rightarrow \sim s$ 이다.

나열된 선택지의 내용을 p, q, r, s 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

- ① $s \rightarrow \sim r$
- ② $\sim r \rightarrow \sim q$
- ③ $\sim q \rightarrow \sim s$
- ④ $p \rightarrow s$
- ⑤ $p \rightarrow \sim r$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

14. [출제의도] 닮은 도형의 성질을 이용하여 옳은 것을 알 수 있는가를 묻는 문제이다.



ㄱ. (참) 두 사각형 ABCD와 FCDE는 닮음이므로 다음이 성립한다.

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{FE} : \overline{FC}$$

$$1 : x = x : 1-x$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

ㄴ. (참) $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ 의 양변에 $x(1-x)$ 를 곱하면

$$1-x = x^2 \quad \therefore x^2 = 1-x \quad \text{㉠}$$

㉠의 양변에 x 를 곱하여 정리하면

$$x^3 = x-x^2 = x-(1-x) = 2x-1$$

따라서 $x^3-2x+1=0$ 이다.

ㄷ. (참) 두 사각형 EFCD와 GHDE에서

$$\overline{EF} = x, \overline{FC} = 1-x = x^2, \overline{EG} = 2x-1 = x^3 \text{이므로}$$

$$\overline{EF} : \overline{FC} = \overline{GH} : \overline{HD} \text{이다.}$$

따라서 두 사각형 EFCD와 GHDE는 닮음이다.

한편 사각형 EGJI는 정사각형이므로

$$\overline{EI} = \overline{GE} = x^3 \text{이다. 따라서}$$

$$\overline{ID} = \overline{ED} - \overline{EI}$$

$$= x^2 - x^3$$

$$= x^2(1-x)$$

$$= x^2 \cdot x^2$$

$$= x^4$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. (참) 사각형 ABCD와 FCDE는 닮음이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{FE} : \overline{FC} = 1 : x$$

$$\text{따라서 } \overline{FC} = x\overline{FE} = x \cdot x = x^2$$

사각형 EGHD에 대하여 $\overline{FE} : \overline{FC} = 1 : x$ 이므로

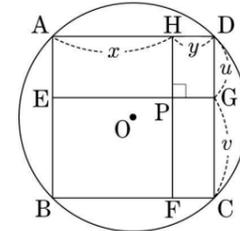
$$\overline{ED} : \overline{EG} = x : 1-x \text{이다.}$$

$$x : 1-x = 1 : x \text{이므로 } \overline{EG} = x \cdot \overline{ED} = x \cdot \overline{FC} = x^3$$

마찬가지로 $\overline{IJ} : \overline{ID} = 1 : x$ 이므로

$$\overline{ID} = x\overline{IJ} = x\overline{EG} = x^4$$

15. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 도형의 증명을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\overline{AH} = x, \overline{HD} = y, \overline{DG} = u, \overline{GC} = v$ 라 하자.

그러면 $x+y = u+v$ 이고,

직사각형 AEPH의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+u^2} \text{이므로 직사각형 AEPH의 외접원의 넓이}$$

$$S_1 \text{은 } S_1 = \frac{\pi}{4}(x^2+u^2) \text{이다.}$$

또, 직사각형 EBFP의 외접원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+v^2} \text{이므로 직사각형 EBFP의 외접원의 넓이}$$

$$S_2 \text{는 } S_2 = \frac{\pi}{4}(x^2+v^2) \text{이다.}$$

마찬가지로 직사각형 PFCG의 외접원의 넓이 S_3 은

$$S_3 = \frac{\pi}{4}(y^2+v^2) \text{이고, 직사각형 HPGD의 외접원의 넓이}$$

S_4 는 $S_4 = \frac{\pi}{4}(y^2+u^2)$ 이다. 따라서

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$= \frac{\pi}{4}(x^2+u^2) + \frac{\pi}{4}(x^2+v^2) + \frac{\pi}{4}(y^2+v^2) + \frac{\pi}{4}(y^2+u^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}(x^2+u^2+x^2+v^2+y^2+v^2+y^2+u^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}(2x^2+2y^2+2u^2+2v^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}(x^2+y^2+u^2+v^2)$$

\therefore (가)에 들어갈 값은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

한편 정사각형 ABCD의 대각선이 원 O의 지름이므로 원 O의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$ 이다.

따라서 원 O의 넓이는 $\frac{\pi}{2}(x+y)^2$ 이다.

\therefore (나)에 들어갈 값은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

또, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - \frac{\pi}{2}(x+y)^2$

$$= \frac{\pi}{2}(x^2+y^2+u^2+v^2) - \frac{\pi}{2}(x+y)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}\{2(x^2+y^2+u^2+v^2) - 2(x+y)^2\}$$

$$\text{한편 } 2(x^2+y^2+u^2+v^2) - 2(x+y)^2$$

$$= 2(x^2+y^2+u^2+v^2) - 2(x+y)(u+v)$$

$$= 2(x^2+y^2+u^2+v^2) - 2(xu+xv+yv+yw)$$

$$= (x-u)^2 + (x-v)^2 + (y-u)^2 + (y-v)^2 \geq 0$$

\therefore (다)에 들어갈 값은 2이다.

따라서 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ 의 값은 $x=y=u=v$ 일 때 최소이고 원 O의 넓이와 같다.

그러므로 $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ 의 값은 원 O의 넓이보다 크거나 같다.

\therefore (가), (나), (다)에 들어갈 값을 모두 더하면 $\pi+2$ 이다.

16. [출제의도] 항등식에서 미정계수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f(x+a) = (x+a)^3 + 9(x+a)^2 + 4(x+a) - 45$$

$$= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3) + 9(x^2 + 2ax + a^2) + 4(x+a) - 45$$

$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + 9x^2 + 18ax + 9a^2 + 4x + 4a - 45$$

$$= x^3 + (3a+9)x^2 + (3a^2+18a+4)x + a^3+9a^2+4a-45$$

주어진 조건에서 이차항의 계수가 0이므로

$$3a+9=0 \text{에서 } a=-3 \text{이다.}$$

$$x^3 + (3a+9)x^2 + (3a^2+18a+4)x + a^3+9a^2+4a-45 \text{에}$$

$$a=-3 \text{을 대입하여 정리하면}$$

$$x^3 + (-9+9)x^2 + (27-54+4)x - 27+81-12-45$$

$$= x^3 - 23x - 3$$

따라서 $b = -23$ 이므로 $a + b = -26$

[다른 풀이]

$$f(x+a) = x^3 + bx - 3 \text{ 이고 } a = -3 \text{ 이므로}$$

$$f(x-3) = x^3 + bx - 3$$

$$x = 3 \text{ 을 대입하면 } f(0) = 3^3 + 3b - 3$$

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 4x - 45 \text{ 에 } x = 0 \text{ 을 대입하면}$$

$$f(0) = -45 \text{ 이다.}$$

$$\text{그러므로 } 24 + 3b = -45 \text{ 에서 } b = -23$$

따라서 $a + b = -26$ 이다.

17. [출제의도] 다항식의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 $x - m$ 과 $x - n$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = (x-m)(x-n)$$

이 식을 전개하면

$$f(x) = x^2 - (m+n)x + mn$$

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ 에서 계수를 비교하면}$$

$$a = -(m+n), b = mn$$

한편,

$$g(x) = x^2 + (m+n-mn)x - m^2n - mn^2$$

$$= x^2 + (m+n-mn)x - mn(m+n)$$

$$= x^2 + (-a-b)x + ab$$

$$= (x-a)(x-b)$$

ㄱ. (참) $f(x) = (x-m)(x-n)$ 이므로 $f(x)$ 를 일차식 $x - m$ 으로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의해서 $f(m) = 0$ 이다. 같은 방법으로 $f(x)$ 를 일차식 $x - n$ 으로 나눈 나머지는 $f(n) = 0$ 이다.

$$\therefore f(m) = f(n) = 0$$

ㄴ. (참) $g(x) = (x-a)(x-b)$ 이므로 $g(x)$ 를 $x - a$ 로 나눈 몫은 $x - b$ 이고 나머지는 0 이다.

ㄷ. (참) $2m + n = 0$ 에서 $n = -2m$ 이므로

$$f(x) = (x-m)(x-n) \text{ 에 대입하면}$$

$$f(x) = (x-m)(x+2m)$$

$$g(x) = x^2 + (m+n-mn)x - mn(m+n) \text{ 을 정리하면}$$

$$g(x) = (x+m+n)(x-mn) \text{ 이다.}$$

$$n = -2m \text{ 을 이 식에 대입하면}$$

$$g(x) = (x+m-2m)(x-m(-2m))$$

$$= (x-m)(x+2m^2)$$

그러므로 $(x-m)$ 은 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 공약수이다.

따라서 $2m + n = 0$ 이면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 일차식 이상의 공약수가 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18. [출제의도] 복소수의 연산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (거짓) $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = (2i)(-2i) = 4$ 이므로

$$\alpha\beta = 2 \text{ 또는 } \alpha\beta = -2 \text{ 이다.}$$

ㄴ. (참) $(\alpha\beta)^2 = 4$ 에서 $\alpha\beta = 2$ 또는 $\alpha\beta = -2$ 이다.

그런데 조건에 의해 $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이므로

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 2\alpha\beta$$

따라서

$$(\alpha + \beta)^4 = (2\alpha\beta)^2 = 4\alpha^2\beta^2 = 16$$

ㄷ. (거짓) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ 이고

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = -1$$

제공한 수가 음수이므로 $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ 는 실수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

[다른 풀이]

$\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하고 $\alpha^2 = 2i$ 에 대입하여 정리하면 $\alpha^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 2i$

그러므로 두 수의 실수부분을 비교하면 $a^2 - b^2 = 0$ 에서 $(a-b)(a+b) = 0$ 이 되어 $a+b=0$ 또는 $a-b=0$ 이다. 즉, $a = -b$ 또는 $a = b$

또 두 수의 허수부분을 비교하면 $ab = 1$ 이다.

그러므로 $a = -b$ 에서 a 대신 $-b$ 를 대입하면 $-b^2 = 1$

그런데 b 는 실수이므로 $b^2 = -1$ 이 될 수 없다.

이번에는 $a = b$ 에서 a 대신 b 를 대입하면 $b^2 = 1$ 이다.

즉, $b = 1$ 또는 $b = -1$

그러므로 $a = 1, b = 1$ 일 때 $\alpha = 1 + i$ 이고

$a = -1, b = -1$ 일 때 $\alpha = -1 - i$ 이다.

마찬가지로 $\beta = c + di$ (c, d 는 실수)라 하고 $\beta^2 = -2i$ 에 대입하여 β 를 구하면

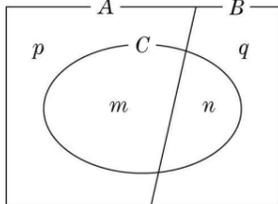
$$\beta = 1 - i \text{ 또는 } \beta = -1 + i$$

ㄱ. (거짓) $\alpha = 1 + i, \beta = -1 + i$ 이면 $\alpha\beta = -2$ 이다.

ㄴ. (참) $\alpha + \beta$ 의 값은 2, -2, 2i, -2i 가 될 수 있으므로 $(\alpha + \beta)^4 = 16$

19. [출제의도] 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

참석할 수 있다고 응답한 회원의 집합을 A, 모르겠다고 응답한 회원의 집합을 B, 실제로 전체 회의에 참석한 회원의 집합을 C라고 하여 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



집합 $A \cap C$ 의 원소의 개수를 m , 집합 $B \cap C$ 의 원소의 개수를 n 이라 하면

$$p + m = 67, q + n = 33 \text{ 에서}$$

$$p - q = 34 - m + n \dots \textcircled{1}$$

그런데 모르겠다고 답한 회원 중 참석한 회원의 수 n 의 범위는 $0 \leq n \leq 33$

또 참석한다고 답한 회원들의 집합과 실제로 참석한 회원들의 집합의 교집합의 회원수가 m 이고, 전체 집합의 원소의 개수는 100 이므로 합집합의 원소의 개수를 이용하여 범위를 구하면

$$67 + 50 - m \leq 100$$

$$\therefore 17 \leq m$$

그런데 실제로 참석한 회원수 m 은 50보다 클 수가 없으므로 $m \leq 50$ 이다.

즉, $17 \leq m \leq 50$

그러므로 ㉠의 최댓값은 $m = 17, n = 33$ 일 때 50 이고 최솟값은 $m = 50, n = 0$ 일 때 -16 이다.

따라서 $p - q$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 34 이다.

20. [출제의도] 실생활에서 일어나는 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A 행성과 B 행성의 중력가속도를 각각 G_A, G_B , 질량을 각각 M_A, M_B 라 하고, 각 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전 반지름의 길이를 각각 r_A, r_B 라 하자. A 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전주기 T_A 는

$$T_A = k \sqrt{\frac{r_A^3}{G_A M_A}}$$

B 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전주기 T_B 는

$$T_B = k \sqrt{\frac{r_B^3}{G_B M_B}}$$

A 행성의 중력가속도는 B 행성의 중력가속도의 3배 이므로 $G_A = 3G_B$ 이다. 또 A 행성의 질량은 B 행성의 질량의 10 배이므로 $M_A = 10M_B$ 이고, A 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전반지름의 길이가 B 행성 주위를 공전하는 인공위성의 공전반지름의 길이의 1.5 배이므로 다음이 성립한다.

$$r_A = \frac{3}{2} r_B$$

그러므로

$$T_A = k \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2} r_B\right)^3}{(3G_B)(10M_B)}}$$

$$= k \sqrt{\frac{\frac{27}{8} r_B^3}{30G_B M_B}}$$

$$= k \sqrt{\frac{27r_B^3}{240G_B M_B}}$$

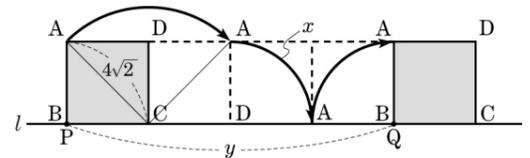
$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{k \sqrt{\frac{27r_B^3}{240G_B M_B}}}{k \sqrt{\frac{r_B^3}{G_B M_B}}}$$

$$= \sqrt{\frac{27}{240}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{80}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

21. [출제의도] 도형의 이동을 추측하고 무리식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



점 C 를 중심으로 정사각형 ABCD 가 $\frac{1}{4}$ 바퀴 구른 후에 정사각형은 두 번째 사각형의 위치에 온다. 이 과정에서 점 A 가 움직인 거리는 반지름이 $4\sqrt{2}$ (\because 점 A 가 그리는 원의 반지름은 정사각형 ABCD 의 대각선의 길이와 같다.)인 사분원의 호의 길이와 같으므로

$$2 \times (4\sqrt{2})\pi \times \frac{1}{4} = 2\sqrt{2}\pi$$

두 번째 사각형의 위치에 있던 정사각형 BCDA 가 점 D 를 중심으로 $\frac{1}{4}$ 바퀴 구른 후의 정사각형은 세 번째 사각형의 위치에 온다. 이 과정에서 점 A 가 움직인 거리는 반지름이 4 (\because 점 A 가 그리는 원의 반지름은 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이와 같다.)인 사분원의 호의 길이와 같으므로

$$2 \times 4 \times \pi \times \frac{1}{4} = 2\pi$$

세 번째 사각형의 위치에 있던 정사각형 CDAB 가 점 A 를 중심으로 $\frac{1}{4}$ 바퀴 구른 후의 정사각형은 네 번째 사각형의 위치에 온다. 이 과정에서 점 A 는 이동하지 않으므로 움직인 거리는 0 이다.

마지막으로 네 번째 사각형의 위치에 있던 정사각형 DABC 가 점 B 를 중심으로 $\frac{1}{4}$ 바퀴 구른 후의 정사각형은 다섯 번째 사각형의 위치에 온다. 이 과정에서 점 A 가 움직인 거리는 반지름이 4 (\because 점 A 가 그리는 원의 반지름은 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이와 같다.)인 사분원의 호의 길이와 같으므로

$$2 \times 4 \times \pi \times \frac{1}{4} = 2\pi$$

점 A 가 움직인 거리는 이 값들을 모두 더한 값이므로 $x = (2\sqrt{2} + 4)\pi$ 이다.

또 두 점 P, Q 사이의 거리 y 는 정사각형 ABCD 의 각 변이 한 번씩 지나간 거리와 같으므로

$$y = 4 \times 4 = 16$$

$$\text{그러므로 } d = \frac{4x}{\pi} - \frac{y}{4} = 12 + 8\sqrt{2} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\frac{1}{\sqrt{d+2}} + \frac{1}{\sqrt{d-2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{d}}{d-4}$$

$$= \frac{2\sqrt{12+8\sqrt{2}}}{8+8\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{8(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

22. [출제의도] 다항식에서 항의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+1)^4 = \{(x+1)^2\}^2$$

$$= (x^2 + 2x + 1)^2$$

$$= (x^2)^2 + (2x)^2 + 1^2 + 2(x^2 \cdot 2x + 2x \cdot 1 + 1 \cdot x^2)$$

$$= x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 + 4x + 2x^2$$

$$= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \quad \text{㉠}$$

㉠과 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x + 1$ 의 계수를 비교하면 $a=4, b=6$ 이다.

따라서 $a+b=10$

[다른 풀이]

모든 실수 x 에 대하여 주어진 등식이 성립하므로 $x=1$ 을 대입하면 $2^4=1+a+b+4+1$ 이다.
따라서 $a+b=10$

23. [출제의도] 이종근호의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(1+5)+2\sqrt{1 \times 5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}$$

$$= \sqrt{5}+1$$

이므로

$$\sqrt{5+\sqrt{5}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{5+\sqrt{5}+(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \sqrt{(1+5)+2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}+1$$

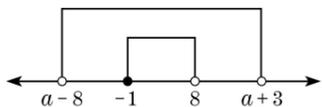
$2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ 이다.

따라서 $\sqrt{5+\sqrt{5}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$ 의 정수부분은 3이므로 $n=3$ 이다.

24. [출제의도] 충분조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$p: \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-8}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-8}}$$

이 성립하려면 $x-8 < 0$ 이고 $x+1 \geq 0$ 에서 $-1 \leq x < 8$
 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | -1 \leq x < 8\}$
 $Q = \{x | a-8 < x < a+3\}$
 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되기 위해서는 $P \subset Q$ 이므로 다음 수직선에서
 $a+3 \geq 8$ 이고 $a-8 < -1$



따라서 $5 \leq a < 7$ 이므로 a 의 최솟값은 5이다.

25. [출제의도] 다항식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) \quad \text{㉠}$$

$$x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=5$$

이므로 ㉠에 각 식의 값을 대입하면
 $0^2 = 5 + 2(xy+yz+zx)$
즉, $xy+yz+zx = -\frac{5}{2}$ ㉡
㉡의 양변을 각각 제곱하면

$$(xy+yz+zx)^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

그런데
 $(xy+yz+zx)^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + 2(xy^2z + xyz^2 + x^2yz)$
 $= (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + 2xyz(y+z+x)$
그러므로

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) = \frac{25}{4}$$

따라서 $p=4, q=25$ 이므로 $p+q=29$

26. [출제의도] 실생활에서 일어나는 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

농도가 $a\%$ 인 소금물 100g에 녹아있는 소금의 양은 $100 \times \frac{a}{100}$ g이고 농도가 $b\%$ 인 소금물 200g에 녹아있는 소금의 양은 $200 \times \frac{b}{100}$ g이다.

그러므로 $p\%$ 인 소금물 300g에 녹아있는 소금의 양은 $100 \times \frac{a}{100} + 200 \times \frac{b}{100} = a+2b$ 에서 $(a+2b)$ g이다.

$$\therefore p = \frac{a+2b}{300} \times 100 = \frac{a+2b}{3}$$

농도가 $a\%$ 인 소금물 200g에 녹아있는 소금의 양은 $200 \times \frac{a}{100}$ g이고 농도가 $b\%$ 인 소금물 100g에 녹아있는 소금의 양은 $100 \times \frac{b}{100}$ g이다.

그러므로 $q\%$ 인 소금물 300g에 녹아있는 소금의 양은 $200 \times \frac{a}{100} + 100 \times \frac{b}{100} = 2a+b$ 에서 $(2a+b)$ g이다.

$$\text{즉, } q = \frac{2a+b}{300} \times 100 = \frac{2a+b}{3}$$

$$\frac{a+2b}{3} : \frac{2a+b}{3} = 2:3 \text{에서}$$

$$3a+6b = 4a+2b \quad \therefore a=4b$$

$$\text{따라서 } \frac{3a^2+4b^2}{ab} = \frac{52b^2}{4b^2} = 13$$

27. [출제의도] 부분집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

조건 (가)에서 $A \cup X = X$ 이므로 집합 A 는 집합 X 의 부분집합이다. 즉, $A \subset X$ 이다.
그러므로 집합 A 의 두 원소 1과 2는 집합 X 의 원소이다.

또, 두 집합 A 와 B 에서 $A = \{1, 2\}$ 이고 $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $B-A = \{3, 5, 7\}$
조건 (나)에서 $(B-A) \cap X = \{5, 7\}$ 이므로 $\{3, 5, 7\} \cap X = \{5, 7\}$ 따라서 $5, 7 \in X, 3 \notin X$
그러므로 1, 2, 5, 7은 반드시 집합 X 에 속해야 하고 3은 속하지 않아야 한다.

그런데 전체집합 $U = \{x | 1 \leq x \leq 12, x \text{는 자연수}\}$ 의 원소의 개수는 12이다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 집합 X 의 개수는 $2^{12-4-1} = 2^7 = 128$ 이다.

28. [출제의도] 복소수의 연산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\alpha = (2-n-5i)^2$$

$$= 2^2 + (-n)^2 + (-5i)^2 + 2(-2n+5mi-10i)$$

$$= 4+n^2+25i^2-4n+10mi-20i$$

$$= (4+n^2-25-4n) + (10m-20)i$$

$$= (n^2-4n-21) + 10(n-2)i$$

복소수 α^2 이 음의 실수가 되려면 α 는 순허수가 되어야 한다.

그러므로 $n^2-4n-21=0$ 이고 $n-2 \neq 0$ 이다.
즉, $(n-7)(n+3)=0, n \neq 2$ 에서 $n=7$ 또는 -3
그런데 n 은 자연수이므로 음수가 될 수 없다.
 $\therefore n=7$

29. [출제의도] 실생활에서 일어나는 문제를 해결할 수

있는가를 묻는 문제이다.

A지역과 B지역의 15세 이상 인구의 비는 3:4이므로 A지역과 B지역의 15세 이상 인구를 각각 $3p, 4p$ 라 하고, 두 지역의 실업자 수의 비는 5:6이므로 두 지역의 실업자 수를 각각 $5q, 6q$ 라 하자.

또 두 지역 A와 B의 취업자 수를 각각 x, y 라 하자. 그런데 문제의 조건에서 경제 활동 인구는 취업자 수와 실업자 수의 합이므로 산출식

$$(\text{실업률}) = \frac{(\text{실업자 수})}{(\text{경제 활동 인구})} \times 100(\%) \text{에서}$$

$$(\text{실업률}) = \frac{(\text{실업자 수})}{(\text{취업자 수}) + (\text{실업자 수})} \times 100(\%)$$

그러므로 두 지역의 실업률을 구하면

$$A \text{ 지역의 실업률은 } \frac{5q}{x+5q} \times 100(\%)$$

$$B \text{ 지역의 실업률은 } \frac{6q}{y+6q} \times 100(\%)$$

그런데 두 지역의 실업률이 같으므로

$$\frac{5q}{x+5q} \times 100 = \frac{6q}{y+6q} \times 100$$

양변을 100으로 나누고 $(x+5q)(y+6q)$ 를 곱하면

$$5q(y+6q) = 6q(x+5q)$$

$$5qy + 30q^2 = 6qx + 30q^2$$

$$5y = 6x$$

따라서 A지역과 B지역의 취업자 수의 비는 5:6이다. 이제 $x=5r, y=6r$ 이라 놓고 고용률을 구하면

$$A \text{ 지역의 고용률은 } \frac{5r}{3p} \times 100$$

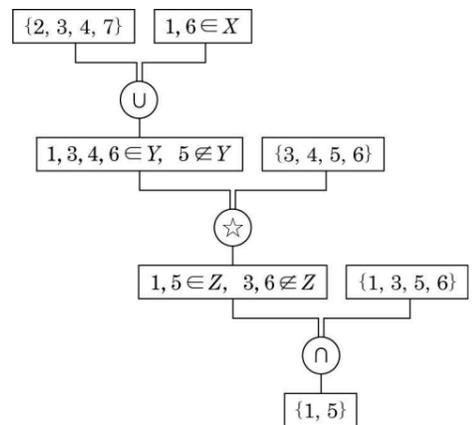
$$B \text{ 지역의 고용률은 } \frac{6r}{4p} \times 100$$

그러므로 구하는 두 지역의 고용률의 비는

$$m:n = \left(\frac{5r}{3p} \times 100\right) : \left(\frac{6r}{4p} \times 100\right) = \frac{5}{3} : \frac{3}{2} = 10:9$$

따라서 $m=10, n=9$ 이므로 $3m+n=39$

30. [출제의도] 집합의 연산을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림의 연산 \cap 에서 교집합이 $\{1, 5\}$ 이기 위해서는 집합 Z 가 원소 1과 5는 반드시 포함하고 원소 3과 6은 포함하지 않아야 한다.

$$\therefore 1, 5 \in Z, 3, 6 \notin Z$$

그림의 연산 \star 에서

$$Y \star \{3, 4, 5, 6\} = (Y - \{3, 4, 5, 6\}) \cup (\{3, 4, 5, 6\} - Y) = Z$$

그런데 집합 $(Y - \{3, 4, 5, 6\}) \cup (\{3, 4, 5, 6\} - Y)$ 은 $Y \cup \{3, 4, 5, 6\}$ 에서 $Y \cap \{3, 4, 5, 6\}$ 을 제외한 집합이다. 그러므로 $3, 6 \notin Z$ 에서 $3, 6 \in (Y \cap \{3, 4, 5, 6\})$ 이다.
 $\therefore 3, 6 \in Y$

$1 \in Z$ 이므로 $1 \in (Y \cup \{3, 4, 5, 6\})$ 에서 $1 \in Y$ 이다.

또, $5 \in Z$ 이고 $5 \in \{3, 4, 5, 6\}$ 이므로 $5 \notin Y$ 이다.

따라서 $1, 3, 6 \in Y$ 이고 $5 \notin Y$ 이다.

그림의 연산 \cup 에서 $\{2, 3, 4, 7\} \cup X = Y$ 이므로

$$Y \supset \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

집합 Y 가 이와 같이 될 수 있는 집합 X 중에서 원소의 합이 가장 작은 것은 $X = \{1, 6\}$ 일 때이다.

따라서 X 의 모든 원소의 합을 s 라 하면 s 의 최솟값은 $1+6=7$ 이다.

[다른 풀이]

모든 단계에서 사용된 원소가 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7뿐이므로 원소 1, 5, 6이 집합 X 의 원소가 되는지 확인해 보는 것으로 충분하다.

i) $1 \in X$ 인 경우 : $1 \in Y$ 이므로 $1 \in Z$ 가 되어 연산이 성립한다.

ii) $5 \in X$ 인 경우 : $5 \in Y$ 이고 $5 \notin Z$ 가 되어 $5 \notin Z \cap \{1, 3, 5, 6\}$ 이므로 연산이 성립하지 않는다.

iii) $6 \in X$ 인 경우 : $6 \in Y$ 이므로 $6 \notin Z$ 가 되어 연산이 성립한다.