수리 영역

정답

1	⑤	2	④	3	①	4	⑤	5	③
6	④	7	⑤	8	③	9	②	10	③
11	②	12	②	13	②	14	③	15	④
16	⑤	17	⑤	18	③	19	①	20	①
21	⑤	22	14	23	18	24	44	25	11
26	13	27	5	28	25	29	200	30	15

해설

1. [출제의도] 집합의 서로소 이해하기

$\{x|x$는 7의 양의 약수$\} = \{1, 7\}$이고

$\{1,7\} \cap A = \phi$이므로 $\{1,\ 7\}$와 A는 서로소

2. [출제의도] 복소수의 사칙연산 계산하기

$$\sqrt{2} \times \sqrt{-2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2}\,i + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,i} = 2i - i = i$$

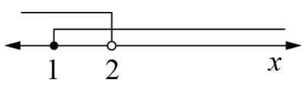
3. [출제의도] 절댓값이 있는 부등식 계산하기

i) $x < 2$일 때

$-2x + 4 \le x + 1$

$3 \le 3x$

$1 \le x$



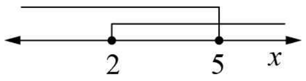
$\therefore\ 1 \le x < 2 \cdots ①$

ii) $x \ge 2$일 때

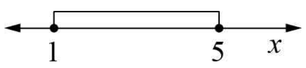
$2x - 4 \le x + 1$

$x \le 5$

$\therefore\ 2 \le x \le 5\ \cdots ②$



①, ②로부터 주어진 식을 만족하는 x값의 범위는



$1 \le x \le 5$

$\therefore$ 부등식을 만족하는 정수 x의 개수는 5개

4. [출제의도] 다항식의 나눗셈 계산하기

$$\begin{array}{r l}
 & 4x + 2 \\
x^2 - x + 1 \,\big) & 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\
 & 4x^3 - 4x^2 + 4x \\
\hline
 & 2x^2 - x + 1 \\
 & 2x^2 - 2x + 2 \\
\hline
 & x - 1
\end{array}$$

$Q(x) = 4x + 2$

$\therefore\ Q(1) = 6$

5. [출제의도] 진리집합 사이의 포함관계로 명제의 참 거짓 추론하기

$(P \cup Q) \cap R = \varnothing$

$\Leftrightarrow (P \cup Q) \subset R^C$

$\Rightarrow P \subset R^C$

$\therefore$ p이면 $\sim r$이다.

6. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기

집합의 연산법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(P^C \cup Q)^C - R &= (P \cap Q^C) \cap R^C \\ &= P \cap (Q^C \cap R^C) \\ &= P \cap (Q \cup R)^C \\ &= P - (Q \cup R) \\ &= \{4, 6, 8, 10\}\end{aligned}$$

$\therefore$ 모든 원소의 합은 28

7. [출제의도] 실수의 대소 관계 추론하기

$a > b$에서 $ab > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

그런데 $\dfrac{1}{a} > 1 > \dfrac{1}{b}$이므로 $ab < 0$

$\dfrac{1}{a} > 1$이므로 $b < 0 < a < 1$이다.

ㄱ. $b > 1$ (거짓)

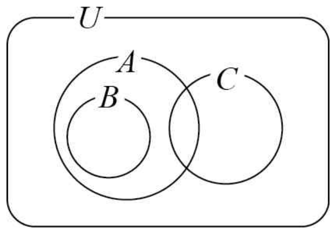
ㄴ. $ab < 0$이므로 $a > b$의 양변에 ab를 곱하면 $a^2b < ab^2$ (참)

ㄷ. $ab + 1 - (a + b) = ab - a - b + 1$
$= a(b-1) - (b-1) = (a-1)(b-1) > 0$
이므로 $ab + 1 > a + b$ (참)

8. [출제의도] '어떤'과 '모든'을 포함한 명제 이해하기

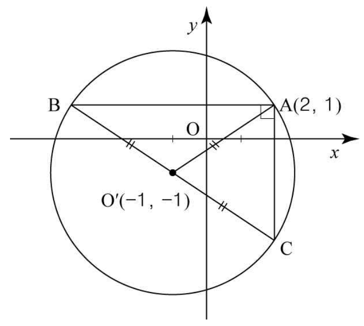
(가)에서 $A \not\subset B$이고, (나)에서 B의 모든 원소 x에 대하여 x는 C의 원소가 아니므로 B와 C는 서로소

$\therefore$ 벤다이어그램 중 두 명제가 참이 되도록 하는 것은



9. [출제의도] 두 점 사이의 거리를 구하여 수학내적문제 해결하기

삼각형 ABC의 외심을 O′라 하면, 외심 O′에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 O′는 변 BC의 중점이다. 따라서 외심의 성질에 의해 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.



그러므로 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = 2\,\overline{\mathrm{O'A}}$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}^2 = 4\,\overline{\mathrm{O'A}}^2 = 4(3^2 + 2^2) = 52$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 52$

10. [출제의도] 필요조건과 충분조건 이해하기

조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아니므로 $p \to q$는 참이고 $q \to p$는 거짓이다.

ㄱ. $x = 0$이고, $y = 0$이면 $|0+0| = |0-0|$

$\therefore\ p \to q$는 참

그러나, $x = 3,\ y = 0$이면

$|3+0| = |3-0|$이지만 $x \ne 0$이므로 $q \to p$는 거짓

ㄴ. $x > y > z$이면 $x - y > 0,\ y - z > 0,$
$z - x < 0$이므로 $(x-y)(y-z)(z-x) < 0$
$\therefore\ p \to q$는 참
그러나 $x = 2, y = 1, z = 5$ 일 때,
$(x-y)(y-z)(z-x) = -12 < 0$ 이지만
$z > x > y$ 이므로 $q \to p$는 거짓

ㄷ. $|x| + |y| > |x + y|$
$\Leftrightarrow (|x| + |y|)^2 > |x + y|^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2|x||y| + y^2 > x^2 + 2xy + y^2$
$\Leftrightarrow |xy| > xy$
$\Leftrightarrow xy < 0$
$\therefore\ p \to q$와 $q \to p$는 모두 참

$\therefore$ 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄴ

11. [출제의도] 다항식의 최대공약수 이해하기

다항식 $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면, $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$이다.

$x + 2$가 $g(x)$와 $R(x)$의 인수이므로

$g(-2) = R(-2) = 0$

따라서 $f(-2) = 0$

$f(-2) = 16 + 4a + 2 - 2 = 0\quad \therefore a = -4$

$g(-2) = -8 - 2b + 2 = 0\quad \therefore b = -3$

$\therefore a + b = -7$

12. [출제의도] 무리식을 이용하여 수학외적문제 해결하기

가속도 $a = 0$일 때 T의 값 $A = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$,

가속도 $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}g$일 때 T의 값

$$B = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{\sqrt{3}}{2}g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{3}}}\sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{이다.}$$

$$\therefore\ \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

13. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여 수학내적문제 해결하기

이차방정식 $x^2 + 2\sqrt{2}\,x - m(m+1) = 0$이 실근을 가지므로 판별식 D가 $D \ge 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2 + m(m+1) = m^2 + m + 2 = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$$

$\therefore$ 모든 실수 m에 대하여 실근을 갖는다. $\cdots ①$

이차방정식 $x^2 - (m-2)x + 4 = 0$은 허근을 가지므로 판별식 D가 $D < 0$이어야 한다.

$D = (m-2)^2 - 16 < 0$

$m^2 - 4m - 12 < 0$

$(m+2)(m-6) < 0$

$\therefore\ -2 < m < 6\ \cdots ②$

$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족시키는 실수 m의 값의 범위는 $-2 < m < 6$

14. [출제의도] 켤레복소수의 성질 이해하기

$\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = 3$에서 $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{3}\overline{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{3}\overline{\beta}$이므로

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{3}\overline{\alpha}+\frac{1}{3}\overline{\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$$
$$=\frac{1}{3}(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$=\frac{1}{3}\times 3=1$$

15. [출제의도] 복소수의 거듭제곱의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

(가)에서 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$

이므로 자연수 k에 대하여 $n=3k$

(나)에서

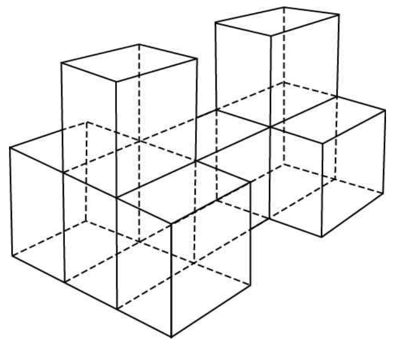
$$\left(-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}=(-1)^{3k}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k}$$
$$=(-1)^{3k}\times 1=1$$

이므로 자연수 l에 대하여 $k=2l$

그러므로 $n=6l$

$\therefore$ n의 최솟값은 6

16. [출제의도] 3차방정식을 이용하여 수학외적 문제 해결하기



그림과 같이 필요한 블록의 개수는 8개이므로

$8x(x+1)(x+2)=7x^3+28x^2+20x+5$

$x^3-4x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=5$

17. [출제의도] 무리식의 성질을 이용하여 실수의 대소관계 추론하기

$|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2$

$=a^2p^2+2abpq+b^2q^2-(a^2p+b^2q)$

$=a^2p(p-1)+b^2q\boxed{(q-1)}+2abpq$

조건에서 $p+q=1$이므로 $q=1-p$를 대입하면

$=a^2p(p-1)+b^2(1-p)(-p)+2abp(1-p)$

$=p(p-1)(a^2+b^2-2ab)$

$=\boxed{(a-b)^2}\,p(p-1)$

주어진 조건에서 $p\ge 0,\ p-1=-q\le 0$ 이므로

$p(p-1)\boxed{\le}\,0$이고, $(a-b)^2\ge 0$

$(a-b)^2p(p-1)\le 0$

$\therefore |ap+bq|\le\sqrt{a^2p+b^2q}$

18. [출제의도] 유리식을 이용하여 수학외적문제 해결하기

수리영역에 응시한 전체 학생 수를 A라 하면,

남학생이 $\frac{x}{100}A$명, 여학생이 $\frac{y}{100}A$명

수리영역에 응시한 전체 학생들의 점수의 총합을 B라 하면, 남학생들의 점수의 총합은 $\frac{a}{100}B$점,

여학생들의 점수의 총합은 $\frac{b}{100}B$점

그러므로 남학생의 평균점수는 $\dfrac{\frac{a}{100}B}{\frac{x}{100}A}=\frac{aB}{xA}$

여학생의 평균점수는 $\dfrac{\frac{b}{100}B}{\frac{y}{100}A}=\frac{bB}{yA}$

따라서 남학생의 평균점수에 대한 여학생의 평균점수의 비의 값을 나타낸 식은

$$\dfrac{\frac{bB}{yA}}{\frac{aB}{xA}}=\frac{bx}{ay}$$

19. [출제의도] 삼차방정식을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$

$x^3-2x^2+3x-1=0$의 세 근이

$\frac{1}{\alpha\beta},\ \frac{1}{\beta\gamma},\ \frac{1}{\gamma\alpha}$이므로

ⅰ) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{c}=2$

ⅱ) $\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}$

$=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}$

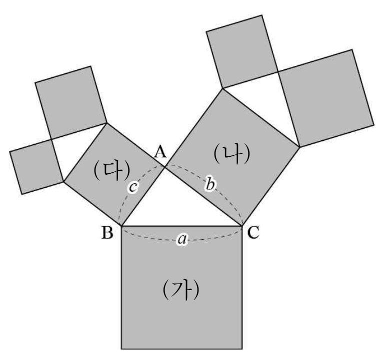
$=\frac{\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{b}{c^2}=3$

ⅲ) $\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{c^2}=1$

$c^2=1$이므로 ⅰ)에서 $a^2=4$, ⅱ)에서 $b^2=9$

$\therefore$ $a^2+b^2+c^2=14$

20. [출제의도] 부등식을 이용하여 수학내적문제 해결하기



피타고라스의 정리에 의해 그림에서 정사각형 (가)의 넓이는 정사각형 (나)의 넓이와 정사각형 (다)의 넓이의 합과 같다.

$\therefore$ $a^2=b^2+c^2$

이와 같은 관계를 나머지 사각형에 적용하면 모든 정사각형의 넓이의 합은 $3a^2$

따라서 $3a^2=75$이므로 $a=5$

그런데 $a^2=b^2+c^2\ge 2\sqrt{b^2c^2}=2bc$이므로

$25\ge 2bc$

$\therefore$ $2abc$의 최댓값은 125

21. [출제의도] 유리식과 무리식을 이용하여 사다리꼴의 성질 추론하기

ㄱ. $\triangle$ABC와 $\triangle$DBC의 높이가 같고 밑변은 공통이므로 두 삼각형의 넓이가 같다.

$S_2+S_3=S_4+S_3$

$\therefore$ $S_2=S_4$ (참)

ㄴ. 높이가 같은 삼각형에서 밑변의 길이의 비는 넓이의 비와 같으므로 $\overline{\text{BO}}:\overline{\text{OD}}$를 $m:n$이라 하면 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{n}{m}=\frac{S_4}{S_3}$이므로 $S_1S_3=S_2S_4$ (참)

ㄷ. 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$S_1+S_2+S_3+S_4$이고

ㄱ과 ㄴ에 의하여 $S_1S_3=S_2S_4=S_4^2$이므로

$S_1+S_2+S_3+S_4=S_1+S_3+2S_4$

$=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}$

$=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3})^2$ (참)

22. [출제의도] 실수의 연산 이해하기

a◎$b=a-3b+2ab$이므로

4◎2 $=4-6+16=14$

23. [출제의도] 좌표평면 위에서 외분점의 좌표 계산하기

두 점 A$(2,4)$, B$(-2,5)$를 잇는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점의 좌표는

$(x,\ y)=\left(\frac{1\times(-2)-2\times 2}{1-2},\ \frac{1\times 5-2\times 4}{1-2}\right)$

$=(6,\ 3)$

$\therefore$ $xy=18$

24. [출제의도] 무리식의 성질 이해하기

$\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2+2\sqrt{2}$

$\alpha=4,\ \beta=8$ 또는 $\alpha=8,\ \beta=4$이므로

$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=32$이다.

근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$이므로

$p=12, q=32$

$\therefore$ $p+q=44$

25. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

x에 대한 항등식이므로

$x=-1$ 대입, $1-a+1+b=0$

$x=2$ 대입, $16-4a-2+b=0$

a와 b에 관한 연립방정식을 풀면, $a=4, b=2$

$x^4-4x^2-x+2=(x+1)(x-2)f(x)$ 이므로

$x=3$을 대입하면 $f(3)=11$

26. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2+(1-3m)x+2m^2-4m-7=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, 근과 계수의 관계로부터 $\alpha+\beta=3m-1,\ \alpha\beta=2m^2-4m-7$이다.

두 근의 차가 4이므로 $|\alpha-\beta|=4$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(3m-1)^2-4(2m^2-4m-7)=16$

$m^2+10m+13=0$

$\therefore$ 실수 m의 모든 값의 곱은 13

27. [출제의도] 연립방정식을 활용하여 수학내적문제 해결하기

$$\begin{cases}3x-y+2z=4 & \cdots\cdots ①\\ x-2y+2z=1 & \cdots\cdots ②\\ ax+ay-2z=0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

①$-$②에서 $2x+y=3$ …… ④

②$+$③에서 $(a+1)x+(a-2)y=1$ …… ⑤

④식을 ⑤식에 대입하면

$(5-a)x=7-3a$이고
방정식의 해가 존재하지 않으려면
$5-a=0$이고 $7-3a \neq 0$
$\therefore\ a=5$

28. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

자연수 k에 대하여

$$i^n=\begin{cases} i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ -1 & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ -i & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로

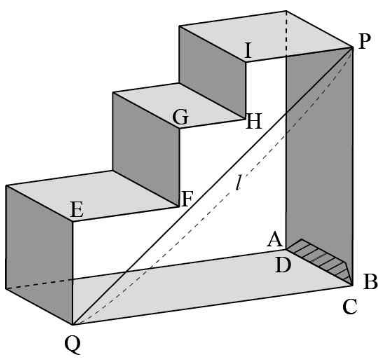
$$\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

$$=\ -i+1+i-1+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

$$=\begin{cases} -i & (n=4k-3 \text{ 일 때}) \\ 1-i & (n=4k-2 \text{ 일 때}) \\ 1 & (n=4k-1 \text{ 일 때}) \\ 0 & (n=4k \text{ 일 때}) \end{cases}$$

따라서 주어진 등식을 만족하는 n의 값은 자연수 k에 대하여 $n=4k-2$일 때이다.
$0<4k-2 \leq 100$
$\frac{2}{4}<k \leq \frac{102}{4}$ 이므로 식을 만족하는 자연수 k는 $1, 2,\ 3,\ \cdots,\ 25$ 이다.
$\therefore$ 25개

29. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 수학외적문제 해결하기



위의 그림에서와 같이 종이가 접히는 각 점을 $\mathrm{E, F, G, H, I}$ 라 하면,
$\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{GH}}+\overline{\mathrm{IP}}=\overline{\mathrm{QB}}$
$\overline{\mathrm{QE}}+\overline{\mathrm{FG}}+\overline{\mathrm{HI}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{QB}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$라 하면 종이띠의 길이가 40이므로 $2(a+b)=40$에서 $a+b=20$이다.
$l^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=400-2ab$
$20=a+b \geq 2\sqrt{ab}$에서 $ab \leq 100$이므로
$\therefore$ l^2의 최솟값은 200

(다른 풀이)
$\overline{\mathrm{QB}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}}=b$라 하면 종이띠의 길이가 40이므로 $2(a+b)=40$ $\therefore a+b=20,\ a^2+b^2=l^2$
실수 p, q, x, y에 대하여
부등식 $(p^2+q^2)(x^2+y^2) \geq (px+qy)^2$ 이 절대부등식이므로
$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$
$2l^2 \geq 20^2$
$\therefore$ l^2의 최솟값은 200

30. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AL_1}}=a\ (a>0)$라 하면, $\overline{\mathrm{N_1M_1}}=\overline{\mathrm{N_1C}}=a$,
$\overline{\mathrm{AL_1}}\cdot\overline{\mathrm{L_2B}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{L_2B}}=\frac{1}{a}=\overline{\mathrm{L_2M_2}}$
또한, $\overline{\mathrm{L_1M_1}}$과 $\overline{\mathrm{M_2N_2}}$의 교점을 점P라 하고, $\overline{\mathrm{L_1L_2}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{PM_2}}=\overline{\mathrm{PM_1}}=x$
평행선의 성질에 의해 $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{L_2BM_2}$, $\triangle\mathrm{PM_2M_1}$, $\triangle\mathrm{N_1M_1C}$ 는 모두 닮음이고
닮음비는 $4:\frac{1}{a}:x:a$ 이므로
넓이의 비는 $16:\frac{1}{a^2}:x^2:a^2$ 이다.
삼각형 ABC의 넓이를 S, 어두운 부분 전체의 넓이를 T라 하면
$S=2T$ 이므로
$16k=2\left(\frac{1}{a^2}+x^2+a^2\right)k$ (k는 비례상수)
$8=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+x^2$
$8=(4-x)^2-2+x^2$
$x^2-4x+3=0$
$\therefore x=1$ 또는 3
$a+\frac{1}{a}=4-x$이고 $a>0$이므로
$4-x \geq 2$
즉, $0<x \leq 2$이므로 구하는 $x=1$
$\therefore$ $15\,\overline{\mathrm{L_1L_2}}=15$