2012학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	④	3	⑤	4	⑤	5	②
6	③	7	⑤	8	③	9	②	10	①
11	③	12	③	13	①	14	③	15	④
16	④	17	①	18	①	19	⑤	20	②
21	②	22	17	23	41	24	503	25	12
26	30	27	16	28	11	29	42	30	18

해 설

1. [출제의도] 드 모르간의 법칙을 이용하여 집합의 연산을 한다.

$A-B=A\cap B^C$ 이므로

드 모르간의 법칙에 의해

$(A-B)^C=(A\cap B^C)^C$

$=A^C\cup(B^C)^C$

$=A^C\cup B$

2. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 일차식으로 나눈 나머지를 구한다.

$f(x)=x^{11}+5x^7-3x^4+k$라 하면

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 10이므로

나머지 정리에 의하여

$f(1)=1+5-3+k$

$=3+k$

$=10$

$\therefore k=7$

3. [출제의도] 켤레복소수의 정의를 알고 복소수의 연산을 한다.

주어진 복소수 z에 대하여

$2z+\overline{z}=2(1+2i)+(1-2i)$

$=2+4i+1-2i$

$=3+2i$

4. [출제의도] 집합에서 서로소의 뜻을 안다.

집합 S의 부분집합이 집합 $\{1,2\}$와 서로소가 되어야 하므로 집합 $\{1,2\}$와 교집합이 공집합인 집합 S의 부분집합을 찾으면 된다.

그러므로 $\{1,2,3,4,5\}$에서 원소 1과 2를 제외한 집합 $\{3,4,5\}$의 부분집합을 구하면 다음과 같다.

$\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{3,4,5\}$

따라서 집합 S의 부분집합 중에서 $\{1,2\}$와 서로소인 집합의 개수는 8이다.

[다른 풀이]

집합 S의 부분집합 중에서 $\{1,2\}$와 서로소인 집합은 집합 $\{1,2,3,4,5\}$에서 원소 1과 2를 제외한 집합 $\{3,4,5\}$의 부분집합이므로

$2^3=8$(개)

5. [출제의도] 미정계수법을 이용하여 문제를 해결한다.

$(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-3y+5)k+(3x-4y)=0$

이고, 이 식은 k에 대한 항등식이므로

$\begin{cases} x-3y+5=0 & \cdots ㉠ \\ 3x-4y=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

3×㉠－㉡에서

$3(x-3y+5)-(3x-4y)=0$

$-5y+15=0$

$\therefore y=3$

y의 값을 ㉡에 대입하면

$3x-12=0$

$\therefore x=4$

따라서 $x=4$, $y=3$이므로

$x+y=7$

[다른 풀이]

$(k+3)x-(3k+4)y+5k=0$은 k에 대한 항등식이므로

(i) $k=0$을 대입하면

$3x-4y=0 \quad \cdots ㉠$

(ii) $k=-1$을 대입하면

$2x-y-5=0 \quad \cdots ㉡$

㉠－4×㉡에서

$(3x-4y)-4(2x-y-5)=0$

$-5x+20=0$

$\therefore x=4$

x의 값을 ㉠에 대입하면

$12-4y=0$

$\therefore y=3$

따라서 $x=4$, $y=3$이므로

$x+y=7$

6. [출제의도] 집합의 분배법칙을 이용하여 집합의 포함관계를 나타낸다.

$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)$

$=A\cap B$

$A\cap B=\{3,4\}$이므로

집합 $A\cap(A^C\cup B)$의 모든 원소의 합은

$3+4=7$

[다른 풀이]

$A=\{1,2,3,4\}$

$A^C=\{5,6\}$

$B=\{3,4,5\}$

$A^C\cup B=\{3,4,5,6\}$

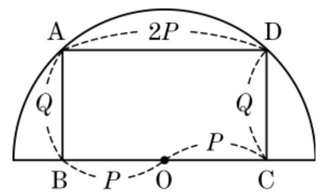
$A\cap(A^C\cup B)=\{3,4\}$이므로

집합 $A\cap(A^C\cup B)$의 모든 원소의 합은

$3+4=7$

7. [출제의도] 다항식의 계산을 한다.

$\overline{\mathrm{OC}}=P$, $\overline{\mathrm{CD}}=Q$라고 하면



$\overline{\mathrm{DA}}=2P$, $\overline{\mathrm{AB}}=Q$, $\overline{\mathrm{BO}}=P$이고

$\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{CD}}=x+y+3$에서

$P+Q=x+y+3 \quad \cdots ㉠$

$\overline{\mathrm{DA}}+\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BO}}=3x+y+5$에서

$3P+Q=3x+y+5 \quad \cdots ㉡$

㉡－㉠에서 $2P=2x+2$

$P=x+1 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$Q=y+2$

직사각형 ABCD의 넓이 S를 구하면

$S=\overline{\mathrm{DA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$

$=2P\times Q$

$=2(x+1)(y+2)$

8. [출제의도] 유리식의 사칙연산을 한다.

$\begin{cases} x-y+z=0 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y+z=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡－㉠하면 $x-2y=0$

$\therefore x=2y \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$z=-y$

그러므로 주어진 식에

$x=2y$와 $z=-y$를 대입하면

$$\frac{x^2-y^2+2z^2}{2xy+yz-3zx}=\frac{(2y)^2-y^2+2(-y)^2}{2(2y)y+y(-y)-3(-y)(2y)}$$

$$=\frac{4y^2-y^2+2y^2}{4y^2-y^2+6y^2}$$

$$=\frac{5y^2}{9y^2}$$

$$=\frac{5}{9}$$

9. [출제의도] 주어진 명제의 필요조건, 충분조건, 필요충분조건을 구분한다.

ㄱ. $x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-3$

두 조건 p, q의 진리집합은 각각

$P=\{2\}$, $Q=\{-3,2\}$

에서 $P\subset Q$이므로 $p\Rightarrow q$이다.

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. 두 조건 p, q의 진리집합은 각각

$P=\{1,2,4,8,16\}$, $Q=\{1,2,4,8\}$

에서 $Q\subset P$이므로 $q\Rightarrow p$이다.

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. 두 조건 p, q의 진리집합은 각각

$P=\{-1,1\}$, $Q=\{-1,1\}$

에서 $P=Q$이므로 $p\Leftrightarrow q$이다.

따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 필요충분조건이다.

10. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 도형의 내적 문제를 해결한다.

한 모서리의 길이가 $x-1$인 정육면체의 부피 A는

$A=(x-1)^3$

한 모서리의 길이가 $x+1$인 정육면체의 부피 B는

$B=(x+1)^3$

두 정육면체의 부피의 합 $A+B$는

$A+B=(x-1)^3+(x+1)^3$

$=(x^3-3x^2+3x-1)+(x^3+3x^2+3x+1)$

$=2x^3+6x$

[다른 풀이] 인수분해 공식을 이용한 방법

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$이므로

$A+B=(x-1)^3+(x+1)^3$

$=\{(x-1)+(x+1)\}\{(x-1)^2-(x-1)(x+1)+(x+1)^2\}$

$=2x(x^2-2x+1-x^2+1+x^2+2x+1)$

$=2x(x^2+3)$

$=2x^3+6x$

11. [출제의도] 규칙성을 찾아 분모의 유리화를 한다.

$\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$의 분모를 유리화하면

$$\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

이와 같은 방법으로 주어진 식을 차례대로 유리화하면

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$

$$=2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

$$=2+(\sqrt{2}-1)$$

$$=\sqrt{2}+1$$

[다른 풀이]

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}+1)+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2+1}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}}$$

$$=2+\cfrac{3+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})+\cfrac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})}$$

$$=2+\frac{3+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}$$

$$=2+\frac{3+2\sqrt{2}}{7+5\sqrt{2}}$$

$$=2+\frac{(3+2\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})}$$

$$=2+\frac{21+14\sqrt{2}-15\sqrt{2}-20}{49-50}$$

$$=2+\frac{1-\sqrt{2}}{-1}$$

$$=2-(1-\sqrt{2})$$

$$=2-1+\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

12. [출제의도] 실수의 대소 관계의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

ㄱ. $a<-1$에서 $-1-a>0$

$c>1$에서 $c-1>0$

두 양수 $-1-a$와 $c-1$을 더해도 양수이므로

$c-a-2>0$

따라서 $c-a>2$ (참)

ㄴ. $a<-1,\ b>0$에서 $\frac{b}{a}<0$

$b>0,\ c>0$에서 $\frac{c}{b}>0$이므로 $\frac{b}{a}<\frac{c}{b}$

따라서 $\frac{b}{a}-\frac{c}{b}<0$ (참)

ㄷ. (반례) $a=-2,\ b=\frac{1}{2}$이면

$a^2-b^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}>1$ (거짓)

[다른 풀이]

ㄴ. $b^2>0,\ -ac>0$에서

$b^2-ac>0$이고

$ab<0$이므로

$\frac{b}{a}-\frac{c}{b}=\frac{b^2-ac}{ab}<0$

따라서 $\frac{b}{a}-\frac{c}{b}<0$ (참)

13. [출제의도] 실수의 대소 관계를 이용하여 내적 문제를 해결한다.

자연수 n에 대하여

$n+2>n+1$ 이고

$n+1>\sqrt{n^2+2n}>\sqrt{n^2+1}$ $(\because n+1=\sqrt{n^2+2n+1})$

$\therefore\ n+2>\sqrt{n^2+2n}>\sqrt{n^2+1}$

따라서 길이가 $n+2$인 변이 직각삼각형의 빗변이 된다.

피타고라스의 정리에 의하여

$(n+2)^2=(\sqrt{n^2+2n})^2+(\sqrt{n^2+1})^2$에서

$n^2+4n+4=(n^2+2n)+(n^2+1)$

$n^2-2n-3=0$

$(n-3)(n+1)=0$

$n=3$ $(\because n>0)$

이므로 직각삼각형의 세 변의 길이는

$5,\ \sqrt{15},\ \sqrt{10}$

이고 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{10}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

[참고] 실수의 대소 관계

$A>B>0$일 때, $\sqrt{A}$와 $\sqrt{B}$의 대소 관계는 다음과 같다.

$(\sqrt{A})^2-(\sqrt{B})^2=A-B>0$

이므로

$(\sqrt{A})^2>(\sqrt{B})^2$

임을 알 수 있고

$\sqrt{A}>0,\ \sqrt{B}>0$

이므로 $\sqrt{A}>\sqrt{B}$이다.

따라서 $A>B>0\ \Rightarrow\ \sqrt{A}>\sqrt{B}$

14. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 복소수의 연산을 한다.

$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$이므로

$n=1$일 때

$i-\frac{1}{i}=i-\frac{i}{i^2}=i-\frac{i}{-1}=i+i=2i$

$n=2$일 때

$i^2-\frac{1}{i^2}=-1-\frac{1}{-1}=-1+1=0$

$n=3$일 때

$i^3-\frac{1}{i^3}=-i-\frac{i}{i^4}=-i-i=-2i$

$n=4$일 때

$i^4-\frac{1}{i^4}=1-\frac{1}{1}=1-1=0$

$n=5$일 때

$i^5-\frac{1}{i^5}=i\cdot i^4-\frac{1}{i\cdot i^4}=i-\frac{1}{i}=2i$

$\vdots$

그러므로 $2i,\ 0,\ -2i,\ 0$이 차례로 반복되어 나타남을 알 수 있다.

따라서 $A=\{-2i, 0, 2i\}$이므로 집합 A의 원소의 개수는 3이다.

15. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 추론 문제를 해결한다.

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자가 각각 $a,\ b,\ c,\ d$인 네 자리 자연수 N에 대하여

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

로 놓으면

$N=\boxed{f(10)}$

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$

이고, 나머지 정리에 의하여

$R=f(-1)=\boxed{-a+b-c+d}$

따라서

$N=f(10)=11Q(10)+(-a+b-c+d)$

이므로 $\boxed{-a+b-c+d}$가 11의 배수인 것은 네 자리 자연수 N이 11의 배수이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 (가)는 $f(10)$이고 (나)는 $-a+b-c+d$이다.

[참고]

문제에서 구한 11의 배수가 되기 위한 필요충분조건은 네 자리 자연수뿐 아니라 모든 자연수에 대하여 성립한다.

(예1) 자연수 7183은

$(7+8)-(1+3)=15-4=11$

이므로 11의 배수 판정법에 의하여 11의 배수가 된다. 실제로 $7183=11\times653$으로 자연수 7183은 11의 배수이다.

(예2) 자연수 135795는

$(1+5+9)-(3+7+5)=15-15=0$

이므로 11의 배수 판정법에 의하여 11의 배수가 된다. 실제로 $135795=11\times12345$로 자연수 135795는 11의 배수이다.

16. [출제의도] '어떤'이 포함된 명제가 참이 되기 위한 조건을 안다.

명제 '$k-1\le x\le k+3$인 어떤 실수 x에 대하여 $0\le x\le 2$이다.'에서

조건 $k-1\le x\le k+3$의 진리집합을

$P=\{x\,|\,k-1\le x\le k+3\}$

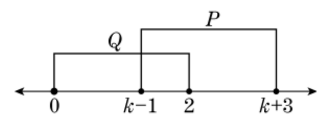
조건 $0\le x\le 2$의 진리집합을

$Q=\{x\,|\,0\le x\le 2\}$

라 하자. 주어진 명제가 참이 되려면 진리집합 P에 속하는 원소 중에서 진리집합 Q에 속하는 원소가 존재한다는 것을 의미한다.

즉, 주어진 명제가 참이 되려면 $P\cap Q\ne\varnothing$이어야 한다. 따라서 두 진리집합 P와 Q를 수직선 위에 나타내어 보면 다음의 2가지 경우 중 하나이다.

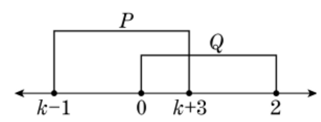
(ⅰ) $k-1\ge0$인 경우



$k-1\le 2,\ k\le 3$

$\therefore\ 1\le k\le 3$

(ⅱ) $k-1<0$인 경우



$0\le k+3,\ k\ge -3$

$\therefore -3\le k<1$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 $-3\le k\le 3$이다.

따라서 $-3\le k\le 3$를 만족하는 정수는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개다.

[참고]

일반적으로 전체집합 U에서의 조건 p에 대하여 '모든 x에 대하여 p이다.', '어떤 x에 대하여 p이다.'와 같은 문장은 참, 거짓이 구별되므로 명제라고 할 수 있다.

한편, 조건 p의 진리집합을 P라 할 때, '모든 x에 대하여 p이다.'가 참이 되기 위해서는 $P=U$이어야 하고, '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이 되기 위해서는 $P\ne\varnothing$이어야 한다.

17. [출제의도] 음수의 제곱근과 절댓값의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

0이 아닌 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

(가)에서 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$이 성립하려면

$a<0$이고 $b>0$이어야 한다.

(나)에서 $|a+b|+|a+c-1|=0$이 성립하려면

$|a+b|\ge0,\ |a+c-1|\ge0$이므로

$a+b=0,\ a+c-1=0$이어야 한다.

곧 $b=-a,\ c=-a+1=b+1$이므로

$a<b<c$이다.

[참고]

음수의 제곱근에 대하여 다음 성질이 성립한다.

실수 a, b에 대하여

$a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

$a<0,\ b>0$일 때, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$

18. [출제의도] 유리식을 이용하여 외적 문제를 해결한다.

희망고와 사랑고의 남녀 학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

구분	희망고	사랑고	계
남학생	$6a$	$2b$	$6a+2b$
여학생	$5a$	$3b$	$5a+3b$
계	$11a$	$5b$	

두 고등학교의 전체 남녀 학생 수의 비가 $4:5$이므로
$(6a+2b):(5a+3b)=4:5$
$4(5a+3b)=5(6a+2b)$
$b=5a$
그러므로 희망고 전체 학생 수와 사랑고 전체 학생 수의 비는
(희망고 전체 학생 수):(사랑고 전체 학생 수)
$=11a:5b$
$=11a:25a$
$=11:25$

19. [출제의도] 사칙연산에 대하여 닫혀 있는 집합의 원소를 구한다.

ㄱ. 조건 (가)에서 집합 A의 원소가 2개 이상이므로 원소 x를 집합 A에서 정할 수 있다.
조건 (나)에서 집합 A는 뺄셈에 대하여 닫혀 있으므로
$x-x\in A$
$\therefore 0\in A$ (참)
ㄴ. 조건 (가)에서 집합 A의 원소가 2개 이상이므로 0이 아닌 원소 x를 집합 A에서 정할 수 있다.
조건 (나)에서 집합 A는 나눗셈에 대하여 닫혀 있으므로
$x\div x\in A$
$\therefore 1\in A$ (참)
ㄷ. ㄴ에서 $1\in A$이고 집합 A는 덧셈에 대하여 닫혀 있으므로
$1+1\in A$ $\therefore 2\in A$
$2+1\in A$ $\therefore 3\in A$
집합 A는 나눗셈에 대하여 닫혀 있으므로
$1\in A,\ 3\in A$
에서 $1\div 3\in A$
$\therefore \frac{1}{3}\in A$ (참)

[참고]
임의의 두 자연수를 더하거나 곱한 값은 항상 자연수이므로 자연수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있다. 그러나 두 자연수를 빼거나 나눈 값은 자연수가 아닌 경우도 있으므로 자연수 전체의 집합은 뺄셈과 나눗셈에 대하여는 닫혀 있지 않다.
정수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있다.
유리수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 0으로 나누는 것을 제외하면 나눗셈에 대하여도 닫혀 있다.
실수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 0으로 나누는 것을 제외하면 나눗셈에 대하여도 닫혀 있다.

20. [출제의도] 나머지 정리를 이용하여 이차식으로 나눈 나머지를 구한다.

삼차식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ … ㉠
한편, $f(x+1)=f(x)+x^2$이므로
(ⅰ) $x=0$을 대입하면
$\quad f(1)=f(0)+0=3$ ($\because f(0)=3$)
(ⅱ) $x=1$을 대입하면
$\quad f(2)=f(1)+1=4$ ($\because f(1)=3$)
(ⅰ), (ⅱ)의 결과를 ㉠에 각각 대입하면
$f(1)=a+b=3$ … ㉡
$f(2)=2a+b=4$ … ㉢
㉢−㉡에서 $a=1$
a의 값을 ㉡에 대입하면
$b=2$
따라서 $a=1,\ b=2$이므로
삼차식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지는 $x+2$이다.

21. [출제의도] 배수의 성질을 이용하여 외적 문제를 해결한다.

제$12+n$회 대회는 $2012+4n$년에 개최되므로 $12+n$의 일의 자리와 $2012+4n$의 일의 자리가 같으면
$(2012+4n)-(12+n)=10N$
을 만족하는 자연수 N이 존재한다.
$3n=10(N-200)$이므로 n은 10의 배수이다.
따라서 2013년 이후 처음으로 대회가 열리는 해의 일의 자릿수와 횟수의 일의 자릿수가 처음으로 같아질 때는 $n=10$일 때이다.
즉, 2052년에 제22회 국제수학교육대회가 열린다.
따라서 $m=2052,\ n=22$이므로
$m+n=2074$

[다른 풀이]
2012년 이후 국제수학교육대회가 열리는 년도와 횟수를 표로 정리하면 다음과 같다.

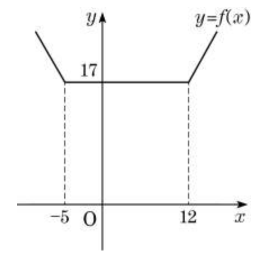
년도	회
2012	12
2016	13
2020	14
2024	15
2028	16
2032	17
2036	18
2040	19
2044	20
2048	21
2052	22
⋮	⋮

2013년 이후 처음으로 대회가 열리는 해의 일의 자릿수와 횟수의 일의 자릿수가 같아질 때는 2052년 제22회이다.
따라서 $m=2052,\ n=22$이므로
$m+n=2074$

22. [출제의도] 절댓값을 포함하고 있는 식의 값을 구한다.

$-5<a<12$일 때,
$a+5>0$이므로 $|a+5|=a+5$
$a-12<0$이므로
$|a-12|=-(a-12)$
$\quad=12-a$
따라서 주어진 식의 값은
$|a+5|+|a-12|=(a+5)+(12-a)$
$\quad=17$

[참고]
$f(x)=|x+5|+|x-12|$라고 하면
(ⅰ) $x<-5$인 경우
$\quad f(x)=-(x+5)-(x-12)$
$\quad=-x-5-x+12$
$\quad=-2x+7$
(ⅱ) $-5\le x<12$인 경우
$\quad f(x)=(x+5)-(x-12)$
$\quad=x+5-x+12$
$\quad=17$
(ⅲ) $x\ge 12$인 경우
$\quad f(x)=(x+5)+(x-12)$
$\quad=x+5+x-12$
$\quad=2x-7$
그래프를 그려보면 그림과 같다.



23. [출제의도] 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구한다.

다항식의 곱셈 공식을 이용하면
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$\quad=5^2-2\cdot(-8)$
$\quad=41$

24. [출제의도] 특수한 사차다항식의 인수분해를 한다.

$x^4-8x^2+16=(x^2)^2-8(x^2)+16$
$\quad=(x^2-4)^2$
$\quad=(x+2)^2(x-2)^2$
이때 $a>b$이므로 $a=2,\ b=-2$
$\frac{2012}{a-b}=\frac{2012}{2-(-2)}=503$

[다른 풀이1] 치환을 이용한 방법
$x^2=t$로 놓으면
$x^4-8x^2+16=t^2-8t+16$
$\quad=(t-4)^2$
$\quad=(x^2-4)^2$
$\quad=(x+2)^2(x-2)^2$
이때 $a>b$이므로 $a=2,\ b=-2$
$\frac{2012}{a-b}=\frac{2012}{2-(-2)}=503$

[다른 풀이2] 항등식의 성질을 이용한 방법
$x^4-8x^2+16=(x+a)^2(x+b)^2$
는 x에 관한 항등식이므로
양변에 $x=-a$를 대입하면
$a^4-8a^2+16=0$
$(a^2-4)^2=0$
$a^2=4$ $\quad\therefore a=\pm 2$
같은 방법으로 양변에 $x=-b$를 대입하면
$b^2=4$ $\quad\therefore b=\pm 2$
문제의 조건 $a>b$에 의하여
$a=2,\ b=-2$
따라서 $\frac{2012}{a-b}=\frac{2012}{2-(-2)}=503$

25. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이용하여 집합의 원소의 개수를 구한다.

$A\cap B^C=A-B$
$\quad=A-(A\cap B)$
이다. 그런데 $6^3=2^3\times 3^3$이므로
집합 A의 원소는
$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 3,\ 2\times 3,\ 2^2\times 3,\ 2^3\times 3,\ 3^2,\ 2\times 3^2,$
$2^2\times 3^2,\ 2^3\times 3^2,\ 3^3,\ 2\times 3^3,\ 2^2\times 3^3,\ 2^3\times 3^3$
이고 $n(A)=16$이다.
$B=\{y\,|\,y=x^2,\ x\in A\}$이므로 집합 B의 원소는
$1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^6,\ 3^2,\ 2^2\times 3^2,\ 2^4\times 3^2,\ 2^6\times 3^2,\ 3^4,\ 2^2\times 3^4,$
$2^4\times 3^4,\ 2^6\times 3^4,\ 3^6,\ 2^2\times 3^6,\ 2^4\times 3^6,\ 2^6\times 3^6$
이다. 집합 $A\cap B$의 원소는
$1,\ 2^2,\ 3^2,\ 2^2\times 3^2$
이고 $n(A\cap B)=4$
따라서 집합 $A\cap B^C$의 원소의 개수는
$n(A\cap B^C)=n(A)-n(A\cap B)=16-4=12$

[다른 풀이]
$A\cap B^C=A-B$
$\quad=A-(A\cap B)$
이다. $6^3=2^3\times 3^3$이므로 집합 A의 원소의 개수는

$(3+1)(3+1)=16$

이고, 집합 $B=\{y\mid y=x^2,\ x\in A\}$에서 집합 B의 원소는 완전제곱수이므로 $n(A\cap B)$는 집합 A의 원소 중 완전제곱수의 개수와 같다. 즉,

$A\cap B=\{1,\ 2^2,\ 3^2,\ 2^2\times 3^2\}$

$n(A\cap B)=4$

따라서 집합 $A\cap B^C$ 의 원소의 개수는

$n(A\cap B^C)=n(A)-n(A\cap B)=16-4=12$

26. [출제의도] 미정계수법을 이용하여 문제를 해결한다.

$x^3-3x^2+5x-4=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(i) $x=2$을 대입하면

$2=c$

(ii) $x=0$을 대입하면

$-4=-8+4a-2b+c$

c의 값을 대입하여 정리하면

$2a-b=1$ ⋯ ㉠

(iii) $x=1$을 대입하면

$-1=-1+a-b+c$

c의 값을 대입하여 정리하면

$a-b=-2$ ⋯ ㉡

㉠−㉡에서 $a=3$

a의 값을 ㉡에 대입하면 $b=5$

따라서 $a=3,\ b=5,\ c=2$이므로

$abc=30$

[다른 풀이] 인수정리를 이용한 방법

(i) 다항식 x^3-3x^2+5x-4를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 아래와 같이 조립제법으로 구하면 몫이 x^2-x+3, 나머지가 2이므로

$x^3-3x^2+5x-4=(x-2)(x^2-x+3)+2$

(ii) 다항식 x^2-x+3를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 아래의 조립제법에 의하면 몫이 $x+1$, 나머지가 5이므로 (i)에서

$x^3-3x^2+5x-4=(x-2)(x^2-x+3)+2$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+5\}+2$

$=(x-2)^2(x+1)+5(x-2)+2$

(iii) 다항식 $x+1$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 아래와 같이 조립제법에 의하면 몫이 1, 나머지가 3이므로 (ii)에서

$x^3-3x^2+5x-4=(x-2)^2(x+1)+5(x-2)+2$

$=(x-2)^2\{(x-2)+3\}+5(x-2)+2$

$=(x-2)^3+3(x-2)^2+5(x-2)+2$

(i)	2	1	−3	5	−4
			2	−2	6
(ii)	2	1	−1	3	2
			2	2	
(iii)	2	1	1	5	
			2		
		1	3		

따라서 (iii)의 결과와 주어진 식을 비교하면 $a,\ b,\ c$의 값이 각각 $a=3,\ b=5,\ c=2$ 이므로 $abc=30$

27. [출제의도] 등식의 성질을 이용하여 유리식의 값을 구한다.

$\dfrac{x^2-3xy-y^2}{x^2-3xy-5y^2}=-3$

$x^2-3xy-y^2=-3(x^2-3xy-5y^2)$

$x^2-3xy-y^2=-3x^2+9xy+15y^2$

$4x^2-12xy-16y^2=0$

$4(x-4y)(x+y)=0$

(i) $x=-y$ 인 경우

$xy=(-y)y=-y^2\le 0$

$xy>0$에 모순이므로 $x\neq -y$

(ii) $x=4y$ 인 경우

$xy=(4y)y=4y^2>0$ ($\because y\neq 0$)

(i), (ii)에서 $x=4y$

$\dfrac{3x+4y}{x-3y}=\dfrac{3(4y)+4y}{4y-3y}$

$=\dfrac{16y}{y}$

$=16$ ($\because y\neq 0$)

[다른 풀이]

좌변의 분자 분모를 y^2 ($\because y\neq 0$)으로 나누면

$\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}\right)-1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\left(\dfrac{x}{y}\right)-5}=-3$

$\dfrac{x}{y}=t\,(t>0)$라 하면

$\dfrac{t^2-3t-1}{t^2-3t-5}=-3$

$4t^2-12t-16=0$

$4(t^2-3t-4)=0$

$4(t-4)(t+1)=0$

$t=4,\ t=-1$

$\therefore t=4$ $(t>0)$

그러므로 $\dfrac{x}{y}=t$에서 $x=4y$

$\dfrac{3x+4y}{x-3y}=\dfrac{3(4y)+4y}{4y-3y}$

$=\dfrac{16y}{y}$

$=16$ ($\because y\neq 0$)

28. [출제의도] 두 다항식의 최대공약수와 최소공배수를 구한다.

$f(x)=x^3-3x^2+ax+4$

$g(x)=x^3-4x^2-3x+2$

로 놓으면

$g(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+2=0$

이므로 인수정리에 의하여 $g(x)$는 $x+1$을 인수로 가진다.

조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

−1	1	−4	−3	2
		−1	5	−2
	1	−5	2	0

$g(x)=(x+1)(x^2-5x+2)$

$\therefore b=2,\ c=1$

최소공배수가 $(x^2-5x+2)(x+1)(x+2)$ 이므로

다항식 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 가진다.

인수정리에 의하여

$f(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)+4=0$

$-2a-16=0$

$\therefore a=-8$

$|a|+|b|+|c|=|-8|+|2|+|1|$

$=8+2+1$

$=11$

29. [출제의도] 이중근호의 값을 계산한다.

정사각형 ABCD의 넓이가

$48+32\sqrt{2}$ 이므로

정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{48+32\sqrt{2}}$

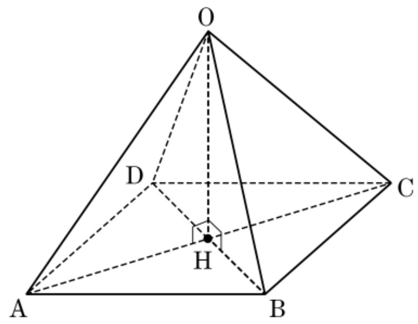
$=\sqrt{16}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$=4(\sqrt{2}+1)$

$=4\sqrt{2}+4$

이다. 그러므로 변 BC의 길이는 $4\sqrt{2}+4$

점 O에서 밑면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면



점 H는 선분 BD의 중점이고

선분 BD는 정사각형 ABCD의 대각선이므로

$\overline{BD}=\sqrt{2}\cdot\overline{BC}$

$\overline{HB}=\dfrac{\overline{BD}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\overline{BC}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{2}+4)$

$=4+2\sqrt{2}$

한편, 직각삼각형 OHB에서

선분 OB가 빗변이므로

$\overline{OH}^2=\overline{OB}^2-\overline{HB}^2$

$=(4\sqrt{2}+4)^2-(4+2\sqrt{2})^2$

$=(6\sqrt{2}+8)(2\sqrt{2})$

$=24+16\sqrt{2}$

$\overline{OH}=\sqrt{24+16\sqrt{2}}$

$=\sqrt{4}\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{6+2\sqrt{8}}$

$=2(\sqrt{4}+\sqrt{2})$

$=4+2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$

$a=4,\ b=2$

$10a+b=10\cdot 4+2=42$

[다른 풀이1]

사각뿔 O−ABCD의 한 모서리의 길이를 k라 하자.

$\overline{OD}=\overline{OB}=k,\ \overline{BD}=\sqrt{2}\times\overline{BC}=\sqrt{2}k$이므로

$\overline{OD}^2+\overline{OB}^2=k^2+k^2=(\sqrt{2}k)^2=\overline{BD}^2$

따라서 삼각형 OBD는 선분 BD가 빗변인 직각이등변삼각형이다.

$\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{OH}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{OB}$에서

$\overline{OH}=\dfrac{\overline{OD}\times\overline{OB}}{\overline{BD}}$

$=\dfrac{k\times k}{\sqrt{2}k}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}k$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times(4\sqrt{2}+4)$

$=4+2\sqrt{2}$

[다른 풀이2]

$\overline{AD}=\overline{OD},\ \overline{AB}=\overline{OB}$, 선분 $\overline{BD}$(공통)이므로

$\triangle ABD\equiv\triangle OBD$ (SSS합동)

$\overline{OH}=\overline{HA}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times(4\sqrt{2}+4)$

$=4+2\sqrt{2}$

30. [출제의도] 복소수의 거듭제곱을 이용하여 수학 외적 문제를 해결한다.

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

$(2i)^2=4i^2=-4$

$(1+i)^2\times 2i=2i\times 2i=-4$

주사위를 던져 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 -32가 나올 수 없다. 그리고 $32=2^5$이므로 주사위는 최소한 5번 이상 던져야 한다.

(i) 주사위를 5번 던지는 경우

2가 3회, $2i$가 2회 나오면

$(2)^3\times(2i)^2=8\times(-4)$

$=-32$

(ⅱ) 주사위를 6번 던지는 경우

2가 3회, $1+i$가 2회, $2i$가 1회 나오면

$$2^3\times(1+i)^2\times 2i=8\times 2i\times 2i$$
$$=-32$$

(ⅲ) 주사위를 7번 던지는 경우

2가 3회, $1+i$가 4회 나오면

$$2^3\times(1+i)^4=8\times(2i)^2$$
$$=-32$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 가능한 n의 값은 5, 6, 7이다.

따라서 구하는 값은 $5+6+7=18$