2012학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 B형 정답

1	④	2	①	3	①	4	②	5	①
6	⑤	7	②	8	⑤	9	④	10	③
11	④	12	①	13	④	14	③	15	⑤
16	②	17	①	18	⑤	19	③	20	②
21	③	22	16	23	7	24	31	25	4
26	16	27	24	28	27	29	761	30	73

해 설

1. A형과 같음.

2. A형과 같음.

3. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구한다.

첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_2=6$이므로 $a+d=6$ $\cdots$ ㉠

$a_4=8$이므로 $a+3d=8$ $\cdots$ ㉡

㉡−㉠을 계산하면 $2d=2$

$\therefore\ d=1$ $\cdots$㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a+1=6$

$\therefore\ a=5$

$a_8=5+1\times7=12$

[다른풀이]

첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_n=a+(n-1)d$

$b_k=a_{2k}$라 하면

$b_k=a+(2k-1)d$

$\quad=(a+d)+(k-1)\times 2d$

이므로 수열 $\{b_k\}$는 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$a_2=6,\ a_4=8$이므로 $b_1=6,\ b_2=8$에서

$\{b_k\}$의 공차는 $8-6=2$이다.

$a_8=b_4$이므로 구하는 값은

$6+(4-1)\times2=6+6=12$

[다른풀이]

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_3=\dfrac{a_2+a_4}{2}=\dfrac{6+8}{2}=7$

공차 d는

$d=a_3-a_2=7-6=1$

따라서 $a_8=a_4+4d=8+4\times1=12$

4. A형과 같음.

5. [출제의도] 합의 기호를 이용하여 수열의 합을 구한다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}\\&=(a_1+a_2)+\cdots+(a_9+a_{10})\\&=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})\\&=5^2\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 25이다.

[다른풀이]

수열 $\{a_n\}$의 제1항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=n^2$이므로

$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=n^2$

즉 $S_{2n}=n^2$ $\cdots$ ㉠

$\sum_{k=1}^{10}a_k=S_{10}$이므로 ㉠에 $n=5$를 대입하면

$S_{10}=5^2=25$

6. A형과 같음.

7. [출제의도] 서로 다른 두 등차수열에서 공통으로 나타나는 수의 개수를 구한다.

$\{a_n\}$: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, $\cdots$

$\{b_n\}$은 첫째항이 100이고 공차가 -5인 등차수열이므로 5의 배수이다.

그런데, 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 공통으로 들어 있는 수는 양의 정수이다.

수열 $\{b_n\}$의 양인 항들을 작은 수부터 나열한 것을 $\{c_n\}$이라 하면

$\{c_n\}$: 5, 10, 15, 20, 25, $\cdots$, 100

그러므로 수열 $\{a_n\}$과 $\{c_n\}$의 공통항을 나열하면

10, 25, $\cdots$, 100

즉, 공통항은 첫째항이 10이고 공차가 15인 등차수열이다.

따라서 공통항으로 이루어진 수열의 일반항은

$10+15(n-1)=15n-5$

l번째 항이 마지막 항이라고 하면 l은

$15l-5\le100$을 만족하는 최대의 정수이다.

$15l-5\le100$

$15l\le105$

$l\le7$

따라서 구하는 수의 개수는 7이다.

[다른풀이]

$\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3이므로

$a_n=4+3(n-1)=3n+1$

$\{b_n\}$은 첫째항이 100, 공차가 -5이므로

$b_n=100-5(n-1)=-5n+105$

$a_l=b_m$이므로

$3l+1=-5m+105$

양변에 5를 더하면

$3l+6=-5m+110$

$3(l+2)=5(-m+22)$

3과 5가 서로 소이므로 $l+2$는 5의 배수이다.

$l+2=5k$(k는 자연수)

$a_l=3(5k-2)+1=15k-5$이므로

$4\le15k-5\le100$

$\dfrac{3}{5}\le k\le7$

따라서 구하는 수의 개수는 7이다.

8. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$x^5y^3=5^{15}$이므로 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^5y^3=\log_5 5^{15}$

$5\log_5 x+3\log_5 y=15$

$X=\log_5 x$, $Y=\log_5 y$로 놓으면

$5X+3Y=15$

$Y=-\dfrac{5}{3}X+5$이므로

$$\begin{aligned}m\log_5 x+15\log_5 y&=mX+15Y\\&=mX+15\left(-\frac{5}{3}X+5\right)\\&=(m-25)X+75\end{aligned}$$

x의 값에 관계없이 $m\log_5 x+15\log_5 y$의 값이 일정하므로 X의 값에 관계없이 $(m-25)X+75$의 값이 일정하다. 즉

$(m-25)X+75=k$(k는 상수)

가 X에 관한 항등식이므로

$m=25$, $k=75$

따라서 구하는 m의 값은 25이다.

[다른풀이]

$x^5y^3=5^{15}$이므로 $y^3=\dfrac{5^{15}}{x^5}$

즉 $y=\left(\dfrac{5^{15}}{x^5}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{5^5}{x^{\frac{5}{3}}}$ $\cdots$ ㉠

조건에서 $m\log_5 x+15\log_5 y$의 값이 일정하므로

$m\log_5 x+15\log_5 y=k$(k는 상수) $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$m\log_5 x+15\log_5 \dfrac{5^5}{x^{\frac{5}{3}}}=k$

$m\log_5 x+15\left(\log_5 5^5-\log_5 x^{\frac{5}{3}}\right)=k$

$m\log_5 x+15\left(5\log_5 5-\dfrac{5}{3}\log_5 x\right)=k$

$m\log_5 x+75\log_5 5-25\log_5 x=k$

$(m-25)\log_5 x+75-k=0$ $\cdots$ ㉢

x에 관계없이 ㉢이 성립해야 하므로

$m-25=0$

따라서 구하는 m의 값은 25이다.

9. A형과 같음.

10. [출제의도] 로그방정식의 해를 구한다.

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$2^{\log x}\times2^{\log x}-(2^{\log x}+5\times2^{\log x})+8=0$

$t=2^{\log x}$로 놓으면

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

즉 $2^{\log x}=2$ 또는 $2^{\log x}=4$

$\log x=1$ 또는 $\log x=2$

$x=10$ 또는 $x=10^2$

따라서 두 근의 곱은 $10\times10^2=10^3$

[다른풀이]

$2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 주어진 방정식은

$x^{\log 2}\times x^{\log 2}-(x^{\log 2}+5\times x^{\log 2})+8=0$

$t=x^{\log 2}$로 놓으면

$t^2-6t+8=0$

$(t-2)(t-4)=0$

$t=2$ 또는 $t=4$

즉 $x^{\log 2}=2$ 또는 $x^{\log 2}=4$

각 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log 2}=\log 2$ 또는 $\log x^{\log 2}=\log 4$

$\log 2\log x=\log 2$ 또는 $\log 2\log x=2\log 2$

각 식의 양변을 $\log 2$로 나누면

$\log x=1$ 또는 $\log x=2$

$x=10$ 또는 $x=10^2$

따라서 두 근의 곱은 $10\times10^2=10^3$

11. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 등비수열의 공비를 구하고 수열의 합을 구한다.

$\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열이므로

$a_2=r$, $a_3=r^2$, $a_4=r^3$

$\log_4 a_3=\log_{a_2} a_4$이므로

$\log_4 r^2=\log_r r^3$

$\dfrac{2}{2}\log_2 r=3\log_r r$

$\log_2 r=3$

$r=2^3=8$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k&=1+8+8^2+\cdots+8^9\\&=\frac{8^{10}-1}{8-1}\\&=\frac{(2^3)^{10}-1}{7}\\&=\frac{1}{7}(2^{30}-1)\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{1}{7}(2^{30}-1)$

12. A형과 같음.

13. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 상용로그의 지표와 가수를 구한다.

$f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$

$\log x = f(x) + g(x)$이므로 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $\log x$의 정수부분과 소수부분이다.

즉 $f(x)$, $g(x)$는 각각 $\log x$의 지표와 가수이다.

$1 = 10^0$이므로 $0 \le \log 1 < 1$

즉, $f(1) = 0$이다.

$10^1 < 11 < 10^2$이므로 $1 < \log 11 < 2$

즉, $f(11) = 1$이다.

$10^2 < 111 < 10^3$이므로 $2 < \log 111 < 3$

즉, $f(111) = 2$이다.

$a = f(1) + f(11) + f(111)$

$= 0 + 1 + 2$

$= 3$

$1 \le a < 10$이므로

$0 \le \log a < 1$ 즉, $f(a) = 0$이다.

$\log 3 = 0 + g(a)$

따라서 $g(a) = \log 3$

[다른풀이]

(다)의 식에 $x = 1$을 대입하면

$10^{f(1)+g(1)} = 1 = 10^0$에서

$f(1) + g(1) = 0$

따라서 $f(1) = 0$

(다)의 식에 $x = 11$을 대입하면

$10^{f(11)+g(11)} = 11 = 10^{1.\times\times\times}$에서

$f(11) + g(11) = 1.\times\times\times$

따라서 $f(11) = 1$

(다)의 식에 $x = 111$을 대입하면

$10^{f(111)+g(111)} = 111 = 10^{2.\times\times\times}$에서

$f(111) + g(111) = 2.\times\times\times$

따라서 $f(111) = 2$

$a = f(1) + f(11) + f(111)$

$= 0 + 1 + 2$

$= 3$

(다)의 식에 $x = 3$을 대입하면

$10^{f(3)+g(3)} = 3 = 10^{0.\times\times\times}$

$f(3) + g(3) = 0.\times\times\times$

$f(3) = 0$이므로 $f(a) = 0$

(다)의 식에 $x = a$를 대입하면

$10^{f(a)+g(a)} = a$

$10^{g(a)} = a = 3$

따라서 구하는 값은 $g(a) = \log 3$

14. A형과 같음.

15. [출제의도] 이차식으로부터 수열의 여러 가지 성질을 발견한다.

ㄱ. $p = 0$일 때,

$S_n = 2n$

$= 2 + 2(n-1)$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $p = 1$일 때,

$S_n = n^2 + 2n$

수열 $\{S_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면

$b_n = S_{n+1} - S_n$

$= \{(n+1)^2 + 2(n+1)\} - \{n^2 + 2n\}$

$= 2n + 3$

$= 5 + 2(n-1)$

즉, 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5이고 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$의 계차수열은 공차가 2인 등차수열이다. (참)

ㄷ. $p = 2$일 때,

제1항부터 제n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + 2n$인 수열의 일반항 a_n을 구하자.

$n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2n^2 + 2n - \{2(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 4n$

이므로 $a_n = 4n\,(n \ge 2)$ ⋯ ㉠

㉠에 $n = 1$을 대입하면 $a_1 = 4 \times 1 = 4$이고,

$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 2 \times 1$

$= 4$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열이다.

따라서 S_n은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열의 제1항부터 제n항까지의 합을 의미한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[다른풀이]

ㄷ. $p = 2$일 때,

$S_n = 2n^2 + 2n$

$= 2n(n+1)$

$= \dfrac{n(4n+4)}{2}$

$= \dfrac{n\{2 \times 4 + (n-1)4\}}{2}$

즉, S_n은 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열의 제1항부터 제n항까지의 합을 의미한다.

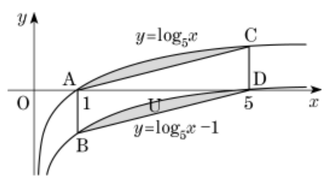
16. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.

$\log_5 \dfrac{x}{5} = \log_5 x - \log_5 5$

$= \log_5 x - 1$이므로

주어진 함수 $y = \log_5 \dfrac{x}{5}$는 $y = \log_5 x - 1$이다.

이 함수의 그래프는 $y = \log_5 x$를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 시킨 것이다.



로그함수 $y = \log_5 x - 1$의 그래프와 선분 BD로 둘러싸인 부분의 넓이를 U라 하자.

그림에서와 같이 선분 BD를 연결하면 넓이 T는 평행사변형 ABDC에서 U를 뺀 것이다.

즉 $T = 2\triangle\mathrm{ADC} - U$ ⋯ ㉠

그런데 로그함수 $y = \log_5 x$의 그래프와 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 로그함수 $y = \log_5 x - 1$의 그래프와 선분 BD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 U이다.

즉 $S = \triangle\mathrm{ADC} + U$ ⋯ ㉡

㉠+㉡을 계산하면

$S + T = 3\triangle\mathrm{ADC}$

삼각형 ADC는 밑변이 4, 높이가 1인 직각삼각형이므로

$\triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$

따라서 $S + T = 3 \times 2 = 6$

[다른풀이]

$\log_5 \dfrac{x}{5} = \log_5 x - \log_5 5$

$= \log_5 x - 1$이므로

주어진 함수 $y = \log_5 \dfrac{x}{5}$는 $y = \log_5 x - 1$이다.

그러므로 $y = \log_5 \dfrac{x}{5}$의 그래프를 y축 방향으로 1만큼 평행이동 시키면 $y = \log_5 x$의 그래프와 일치한다.

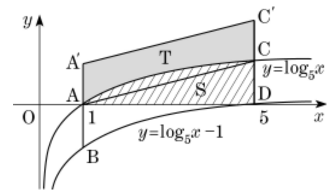
점 A, 점 C를 y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 A′, C′이라 하면 넓이 T는 $y = \log_5 x$의 그래프와 세 선분 AA′, A′C′, C′C로 둘러싸인 넓이와 같다.

그러므로 넓이의 합 $S + T$는 사다리꼴 A′ADC′의 넓이와 같다.

$S + T = \dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{A'A}} + \overline{\mathrm{C'D}})\overline{\mathrm{AD}}$

$= \dfrac{1}{2} \times (1+2) \times 4$

$= 6$



17. A형과 같음.

18. [출제의도] 두 그래프의 교점의 개수를 수열로 나타내고 합을 구한다.

$f(x) = 2^x$, $g(x) = x - [x]$이므로

$g(f(x)) = f(x) - [f(x)] = 2^x - [2^x]$

i) $x < 0$일 때,

$0 < 2^x < 1$이므로 $[2^x] = 0$

즉 $g(f(x)) = 2^x - [2^x] = 2^x$

ii) $0 \le x < \log_2 2$일 때,

$1 \le 2^x < 2$ 이므로 $[2^x] = 1$

즉, $g(f(x)) = 2^x - [2^x] = 2^x - 1$이므로

$y = g(f(x))$의 그래프는 $y = 2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 시킨 것이다.

iii) $\log_2 2 \le x < \log_2 3$일 때,

$2 \le 2^x < 3$이므로 $[2^x] = 2$

즉, $g(f(x)) = 2^x - [2^x] = 2^x - 2$이므로

$y = g(f(x))$의 그래프는 $y = 2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이다.

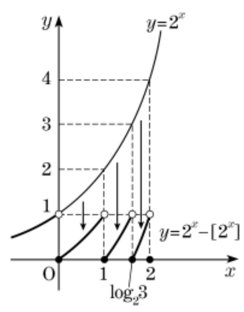
iv) $\log_2 3 \le x < \log_2 4$일 때,

$3 \le 2^x < 4$이므로 $[2^x] = 3$

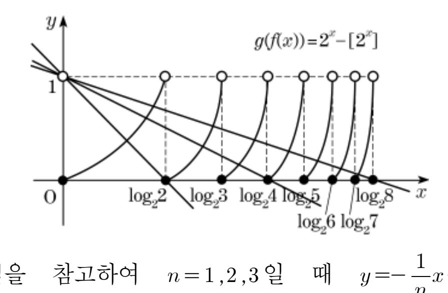
즉, $g(f(x)) = 2^x - [2^x] = 2^x - 3$이므로

$y = g(f(x))$의 그래프는 $y = 2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -3만큼 평행이동 시킨 것이다.

다음의 그래프는 각각의 x의 범위에 따라 $y = 2^x$의 그래프를 평행이동하는 과정을 보여주는 것이다.



그러므로 $y = (g \circ f)(x) = 2^x - [2^x]$의 그래프와 $n = 1, 2, 3$일 때 $y = -\dfrac{1}{n}x + 1$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



그림을 참고하여 $n = 1, 2, 3$일 때 $y = -\dfrac{1}{n}x + 1$과 $y = 2^x - [2^x]$의 그래프가 만나는 점의 개수 a_n을 구하면

$n = 1$일 때

$y = -\dfrac{1}{n}x + 1$의 x절편이 $1 = \log_2 2$이므로 교점의 개수 $a_1 = 2$

$n = 2$일 때

$y = -\dfrac{1}{n}x + 1$의 x절편이 $2 = \log_2 2^2$이므로 교점의 개수 $a_2 = 2^2$

$n=3$일 때

$y=-\frac{1}{n}x+1$의 x절편이 $3=\log_2 2^3$이므로 교점의 개수 $a_3=2^3$

따라서 $a_1+a_2+a_3=2+4+8=14$

[참고]

자연수 k에 대해

$\log_2 k \le x < \log_2(k+1)$일 때

$k \le 2^x < k+1$이므로 $[2^x]=k$

즉, $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x-k$이므로 $y=g(f(x))$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 $-k$만큼 평행이동 시킨 것이다.

$n=k$(k는 자연수)일 때

직선 $y=-\frac{1}{n}x+1$의 x절편이 $k=\log_2 2^k$이므로 교점의 개수는 $a_k=2^k$

19. [출제의도] 로그의 계산을 활용한 실생활 문제를 해결한다.

$6m$ 떨어진 곳에서 느낀 감각강도 P_6과 $9m$ 떨어진 곳에서 느낀 감각강도 P_9는

$P_6=k\log\frac{h}{36}$

$P_9=k\log\frac{h}{81}$

변변 빼면

$$\begin{aligned}P_6-P_9&=k(\log\frac{h}{36}-\log\frac{h}{81})\\&=k\log\frac{\frac{h}{36}}{\frac{h}{81}}\\&=k\log\frac{81}{36}\\&=k\log\frac{9}{4}\\&=k(\log9-\log4)\\&=k(2\log3-2\log2)\\&=k(2\times0.48-2\times0.30)\\&=0.36k\end{aligned}$$

20. A형과 같음.

21. A형과 같음.

22. [출제의도] 등비수열의 규칙을 발견하고 항의 값을 구한다.

첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_2=ar$

$a_3=ar^2$

$a_4=ar^3$이므로

$a_1a_2=4$에서 $a\cdot ar=4$이다.

즉 $a^2r=4$ ⋯ ㉠

또, $a_3a_4=8$에서 $ar^2\cdot ar^3=8$이다.

즉 $a^2r^5=8$ ⋯ ㉡

㉡÷㉠을 계산하면

$\frac{a^2r^5}{a^2r}=\frac{8}{4}$에서 $r^4=2$ ⋯ ㉢

$a_5=ar^4$, $a_6=ar^5$이므로

$$\begin{aligned}a_5a_6&=ar^4\cdot ar^5\\&=a^2r^9\\&=a^2r\cdot r^8\\&=a^2r\cdot(r^4)^2\\&=4\cdot2^2\\&=16\end{aligned}$$

[다른풀이]

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$a_3=a_1r^2$, $a_4=a_2r^2$이므로

$a_3a_4=(a_1r^2)(a_2r^2)=a_1a_2r^4$

$a_5=a_3r^2$, $a_6=a_4r^2$이므로

$a_5a_6=(a_3r^2)(a_4r^2)=a_3a_4r^4$

$\frac{a_3a_4}{a_1a_2}=\frac{a_1a_2r^4}{a_1a_2}=r^4$

$\frac{a_5a_6}{a_3a_4}=\frac{a_3a_4r^4}{a_3a_4}=r^4$

즉, $\frac{a_3a_4}{a_1a_2}=\frac{a_5a_6}{a_3a_4}=r^4$(상수)이므로

세 수 a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6는 등비수열을 이룬다.

한편, $\frac{a_3a_4}{a_1a_2}=\frac{8}{4}=2$는 공비가 2이므로

$$\begin{aligned}a_5a_6&=2\times a_3a_4\\&=2\times8\\&=16\end{aligned}$$

[다른풀이]

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$b_k=a_{2k-1}a_{2k}$이라 하면

$b_k=ar^{2k-2}\cdot ar^{2k-1}=a^2r^{4k-3}=a^2r\cdot(r^4)^{k-1}$

즉, 수열 $\{b_k\}$는 첫째항이 a^2r, 공비가 r^4인 등비수열이다.

$b_1=4$, $b_2=8$이므로 공비는 $\frac{b_2}{b_1}=\frac{8}{4}=2$이다.

즉 $b_n=4\times2^{n-1}$

$a_5a_6=b_3$이므로 구하는 값은 $4\times2^2=16$

23. A형과 같음.

24. A형과 같음.

25. A형과 같음.

26. A형과 같음.

27. [출제의도] 등차중항을 이용하여 등차수열의 합을 구한다.

처음 나무통의 높이를 a, 원판 1개의 높이를 h라 하면 $\{h_n\}$은 첫째항이 $a+h$, 공차가 h인 등차수열이므로

$h_n=a+h+(n-1)h=a+nh$

$$\begin{aligned}&h_5+h_{13}+h_{17}+h_{25}\\&=(a+5h)+(a+13h)+(a+17h)+(a+25h)\\&=4a+60h\\&=4(a+15h)\\&=4h_{15}\end{aligned}$$

$h_{15}=6$이므로 구하는 값은 $4\times6=24$

[다른풀이]

$\{h_n\}$이 등차수열이므로 세 수 h_{15-k}, h_{15}, h_{15+k}도 등차수열을 이룬다. $(1\le k\le14)$

h_{15}가 등차중항이므로 $h_{15-k}+h_{15+k}=2h_{15}$

$h_5+h_{25}=h_{13}+h_{17}=2h_{15}$

따라서 구하는 값은 $4h_{15}=4\times6=24$

28. [출제의도] 부분분수전개를 사용하여 등차수열의 일반항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$$\begin{aligned}S_{10}&=\sum_{k=1}^{10}(-1)^ka_k\\&=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+a_8-a_9+a_{10}\\&=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)\\&\quad+(a_8-a_7)+(a_{10}-a_9)\\&=d+d+d+d+d\\&=5d\end{aligned}$$

$S_{10}=25$이므로

$5d=25$ $\therefore$ $d=5$

$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

그런데 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이므로

$a_{k+1}-a_k=d=5$

즉, $\frac{1}{a_{k+1}-a_k}=\frac{1}{5}$

그러므로 $\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$$\begin{aligned}T_5&=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_ka_{k+1}}\\&=\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5d}\right)\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+25}\right)\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{a(a+25)}\\&=\frac{5}{a(a+25)}\end{aligned}$$

$\frac{1}{T_5}=\frac{54}{5}$이므로

$\frac{a(a+25)}{5}=\frac{54}{5}$

$a(a+25)=54$

$a^2+25a-54=0$

$(a+27)(a-2)=0$

$\therefore$ $a=2(\because a>0)$

따라서 $a_6=2+5\times5=27$

29. [출제의도] 규칙성을 찾고 계차수열을 이용하여 그 수열의 합을 구한다.

그림의 왼쪽에서 3번째 원에 적혀있는 수들로 제3행부터 차례로 나열하여 수열을 만들자. 그 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 5, 13, 25, 41, 61, ⋯

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하자.

b_k는 $b_k=a_{k+1}-a_k$이므로

$\{b_k\}$: 4, 8, 12, 16, 20, ⋯

그러므로 $b_k=4k$

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k\\&=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=1+4\times\frac{(n-1)n}{2}\\&=2n^2-2n+1\end{aligned}$$

22행의 왼쪽에서 3번째 원에 적혀 있는 수는 수열 $\{a_n\}$의 20번째 항이므로 구하는 값은

$a_{20}=2\times20^2-2\times20+1=761$

[참고]

그림의 왼쪽에서 2번째 원에 적혀있는 수들로 제2행부터 차례로 나열하여 만든 수열을 $\{c_n\}$이라 하자.

$c_1=1$

$n\ge2$일 때, $c_n=1+1+c_{n-1}$이므로 $c_n=c_{n-1}+2$

즉, 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 2인 등차수열이므로 $c_n=2n-1$

$a_1=1$

$n\ge2$일 때, $a_n=c_{n-1}+c_n+a_{n-1}$이므로

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=c_{n-1}+c_n\\&=(2n-3)+(2n-1)\\&=4n-4\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=a_{n+1}-a_n=4(n+1)-4=4n$

30. A형과 같음.