2012학년도 9월 고1 전국연합학력평가

정답 및 해설(1~3교시)

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	②	4	①	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	③	10	⑤
11	③	12	①	13	①	14	④	15	②
16	④	17	③	18	③	19	②	20	⑤
21	②	22	17	23	14	24	60	25	15
26	23	27	5	28	16	29	36	30	9

해설

1. [출제의도] 복소수의 사칙연산 계산하기

$(1+i)\left(1-\dfrac{1}{i}\right)=(1+i)\left(1-\dfrac{i}{i\times i}\right)$

$=(1+i)(1+i)=2i$

2. [출제의도] 집합의 성질 이해하기

$(A-B^C)^C=(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

3. [출제의도] 절댓값의 성질 이해하기

$-2\le a<1$ 이므로

$\sqrt{(a+2)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$

$=|a+2|-|a-3|=(a+2)+(a-3)$

$=2a-1$

4. [출제의도] 이차방정식의 근의 성질 이해하기

한 근이 $2-4i$ 이므로 다른 한 근은 $2+4i$ 이다.
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$(2+4i)+(2-4i)=-a$

$(2+4i)(2-4i)=b$

따라서 $a=-4$, $b=20$이므로 $a+b=16$

5. [출제의도] 명제와 진리집합 사이의 관계 이해하기

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 P, R의 포함관계는 $R\subset P$이다. 따라서 $P^C\subset R^C$ 이므로 $\sim p\to\sim r$ 이 참이다.

6. [출제의도] 삼각형의 무게중심 구하기

변 BC의 중점을 M이라 하자. △ABC의 무게중심은 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot(-2)+1\cdot 1}{2+1},\ \dfrac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}\right)=(-1,\ 2)$

7. [출제의도] 무리식 계산하기

$\dfrac{1}{a+\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{b+\sqrt{ab}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\dfrac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$

$=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$

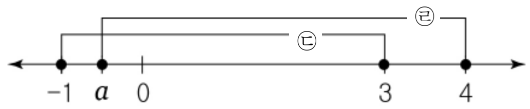
8. [출제의도] 연립부등식의 해의 성질 이해하기

$\begin{cases} x^2-2x-3\le 0 & \cdots ㉠ \\ (x-4)(x-a)\le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+1)(x-3)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 3\quad\cdots ㉢$

㉡과 ㉢을 동시에 만족하는 정수의 개수가 4개이므로 ㉡의 해는 $a\le x\le 4\quad\cdots ㉣$



$\therefore -1<a\le 0$

9. [출제의도] 켤레복소수의 성질 이해하기

$z=a+bi$라 하면

$z+(1-2i)=(a+1)+(b-2)i$는 양의 실수이므로 $a>-1$, $b=2\cdots㉠$

$z\overline{z}=a^2+b^2=7\cdots㉡$

㉠, ㉡에 의해 $a=\sqrt{3}$, $b=2$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=a=\sqrt{3}$

10. [출제의도] 이중근호를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$에서

$x>0$, $y>0$이므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$이고

$x+y=4$, $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=1$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$

$=\dfrac{x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}}{x-y}=\sqrt{3}$

11. [출제의도] 필요조건과 충분조건 이해하기

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 되지 않으려면 $Q\subset P$, $P\ne Q$이어야 한다.

ㄱ. $P=\{-5,\ -1\}$, $Q=\{-1\}$ 이므로 $Q\subset P$ (참)

ㄴ. $P=\{x|-1<x<1\}$이므로 $P\subset Q$ 이다. (거짓)

ㄷ. $x=-2$, $y=1$은 P에 속하지만 Q에 속하지 않고, Q에 속한 모든 x, y는 P에 속한다. (참)

12. [출제의도] 부분집합의 개수를 이용하여 수학내적문제 해결하기

1이 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-1}-1=15$

1은 포함되지 않고 2는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-2}-1=7$

1, 2는 포함되지 않고 3은 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-3}-1=3$

1, 2, 3은 포함되지 않고 4는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{5-4}-1=1$

1, 2, 3, 4는 포함되지 않고 5는 포함된 원소가 2개 이상인 부분집합은 없다.

$\therefore\ 15\times 1+7\times 2+3\times 3+1\times 4=42$

13. [출제의도] 절대부등식 이해하기

$x^2-2kx-2k^2+k+4$

$=(x-k)^2+(-3k^2+k+4)$

이므로 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 항상 성립하기 위해서는 $-3k^2+k+4>0$이어야 한다.

$\therefore -1<k<\dfrac{4}{3}$

그러므로 모든 정수 k의 값의 합은 1이다.

14. [출제의도] 비례식을 이용하여 수학외적 문제 해결하기

A학교에서 갑, 을의 득표수는 각각 $3a$, a ($a\ne 0$인 상수)

B학교에서 갑, 을의 득표수는 각각 $3b, 5b$ ($b\ne 0$인 상수)

A, B학교의 투표자 수의 비가 5 : 4이므로

$(3a+a):(3b+5b)=5:4$

$a:2b=5:4$

$\therefore a:b=5:2$

그러므로 갑, 을의 전체 득표수의 비는

$(3a+3b):(a+5b)=21:15=7:5$

15. [출제의도] 항등식을 이용하여 다항식을 구하는 과정 추론하기

$x^3+2x-1=0$ 의 서로 다른 세 근이 모두 방정식 $(x^2+x+1)P(x)=1$ 의 근이므로

$(x^2+x+1)P(x)-1=(x^3+2x-1)Q(x)$

인 다항식 $Q(x)$가 존재한다.

즉, $(x^2+x+1)P(x)=(x^3+2x-1)Q(x)+1$ 이다.

그런데, x^3+2x-1을 x^2+x+1로 나눈 몫과 나머지는 각각 $x-1$, $\boxed{2x}$ 이므로

$(x^2+x+1)P(x)$

$=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+\boxed{2x}Q(x)+1\cdots㉠$

이다. 등식 ㉠을 만족하는 다항식 $P(x)$의 차수가 최소가 되기 위해서는$Q(x)$가 다항식이므로

$\boxed{2x}Q(x)+1=x^2+x+1$

이어야 한다. 따라서 $Q(x)=\boxed{\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$ 이다.

그러므로 구하고자 하는 다항식

$P(x)=\boxed{\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}}$ 이다.

$f(x)=2x,\ g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2},\ h(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

이므로 $f(1)+g(3)+h(5)=17$

16. [출제의도] 실수의 대소 관계 추론하기

$c^2-ac-bc+ab=(c-a)(c-b)<0$

이므로 $a<c<b$이거나 $b<c<a$이다.

(i) $a<c<b$일 때, $a-b<0$이므로 $a>0$이다. 그런데 $c<0$이므로 모순이다.

(ii) $b<c<a$일 때, $a-b>0$이므로 $a<0$이다. 따라서 모든 조건을 만족한다.

(i), (ii)에 의하여 $b<c<a$

17. [출제의도] 삼차방정식의 근 이해하기

$2x^3+5x^2+(k+3)x+k=(x+1)(2x^2+3x+k)$

이므로 주어진 방정식의 세 근이 음수가 되기 위해서는 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이 음수가 되어야 한다. 따라서 $2x^2+3x+k=0$의 두 근을 α, β 라 하면

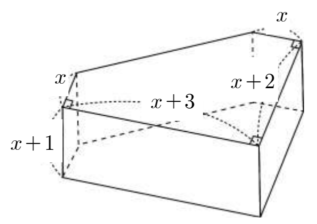
(i) $D=9-8k\ge 0$, $\therefore k\le\dfrac{9}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}<0$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}>0$, $\therefore k>0$

(i), (ii), (iii) 으로부터 $0<k\le\dfrac{9}{8}$

18. [출제의도] 삼차방정식을 이용하여 수학내적문제 해결하기



오각기둥의 부피를 구하면

$\left[x(x+3)+\dfrac{2\{(x+3)+x\}}{2}\right](x+1)=108$

$\{x(x+3)+2x+3\}(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$

$(x-3)(x^2+9x+35)=0$

$x^2+9x+35>0$ 이므로 $x=3$

19. [출제의도] 다항식의 나눗셈 이해하기

$x^3+3x^2+4x+2=f(x)\,Q(x)+g(x)$ ⋯ ㉠

x^3+3x^2+4x+2

$\quad = g(x)\,Q'(x)+f(x)-x^2-2x$ ⋯ ㉡

$f(x)$는 2차의 다항식이므로 $g(x)$는 1차 이하의 다항식임을 알 수 있다. 또한 ㉡식으로부터 $g(x)$로 나눈 나머지는 상수항이 되어야 하므로

$f(x)-x^2-2x=a$ (a는 상수)이다.

등식 ㉠으로부터 $g(x)=(2-a)(x+1)$ 이다.

식 ㉡은

$x^3+3x^2+4x+2=(2-a)(x+1)\,Q'(x)+a$

인 항등식이므로 $x=-1$을 대입하면 $a=0$

$\therefore\ g(x)=2(x+1)$

따라서 $g(1)=4$

20. [출제의도] 복소수의 거듭제곱의 성질 추론하기

ㄱ. $z_2=\left(\dfrac{\sqrt{2}\,i}{1+i}\right)^2=\dfrac{-2}{2i}=i$ (참)

ㄴ. $z_2=i$ 이므로 $z_6=z_2^{\,3}=i^3=-i=-z_2$ (참)

ㄷ. $z_8=z_2z_6=1$이므로 $z_{n+8}=z_n$ (참)

21. [출제의도] 유리식을 이용하여 수학외적 문제 해결하기

$R_1=\dfrac{aW}{p}$ 이다.

2차 광고에 든 비용은

$p+\dfrac{x}{100}p=\left(1+\dfrac{x}{100}\right)p$ 이므로

3차 광고에 든 비용은 $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2p$ 이다.

따라서 $R_3=\dfrac{6aW}{\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2p}$ 이다.

$\dfrac{R_1}{R_3}=\dfrac{2}{3}$이므로 $\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^2=4$

$\therefore\ x=100\ (\because x>0)$

22. [출제의도] 실수의 연산 이해하기

$3*5=3\times5+2=17$

23. [출제의도] 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 계산하기

두 점 $\mathrm{A}(a-1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ a-4)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(a-6)^2+(8-a)^2=10$

$\therefore\ a^2-14a+45=0$ 이다.

따라서 모든 a의 값의 합은 14

24. [출제의도] 연립방정식의 해 구하기

$x+y-z=4$ ⋯㉠

$x-y+z=2$ ⋯㉡

$x+y+z=12$ ⋯㉢

㉠+㉡을 하면 $x=3$, ㉡−㉢을 하면 $y=5$, ㉢−㉠을 하면 $z=4$ 이므로 $xyz=60$

25. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$3x^2-12x-k=0$ 의 두 실근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-\dfrac{k}{3}$, $|\alpha|+|\beta|=6$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$

$\quad=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|$

$\quad=16+\dfrac{2k}{3}+\dfrac{2|k|}{3}$

따라서 $k+|k|=30$ 이다.

$k\le 0$ 이면 성립하지 않으므로 $k>0$ 이다.

$\therefore\ k=15$

26. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 유리식의 최솟값 계산하기

$x^2-9>0$이므로

$x^2+\dfrac{49}{x^2-9}=(x^2-9)+\dfrac{49}{x^2-9}+9$

$\quad\ge 2\sqrt{(x^2-9)\times\dfrac{49}{x^2-9}}+9=23$

따라서 $x=4$일 때 최솟값은 23이다.

27. [출제의도] 고차방정식을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{PC}}$ 이므로

$(2\sqrt{6}\,x)^2=(x^2-x+4)(x^2+x+4)$이다.

즉, $x^4-17x^2+16=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-17t+16=(t-1)(t-16)=0$

$\therefore\ t=1,\ t=16$

$x^2=1,\ x^2=16$이므로

$x=1,\ x=4\,(\because x>0)$

따라서 모든 x값의 합은 5이다.

28. [출제의도] 다항식의 곱셈을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$r_1+r_2+r_3=8$이고, 어두운 부분과 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합이 같으므로 원 O_1, O_2, O_3의 넓이의 합은 원 O의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이다. 즉,

$\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2=\dfrac{1}{2}\times64\pi$ 이다.

$\therefore\ r_1^2+r_2^2+r_3^2=32$

$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1$

$\quad=\dfrac{1}{2}\left\{(r_1+r_2+r_3)^2-\left(r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)\right\}$

$\quad=\dfrac{1}{2}(64-32)=16$

29. [출제의도] 다항식의 최대공약수의 성질 이해하기

$x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

$2x^3+(a-2)x^2+(4-a)x-4$

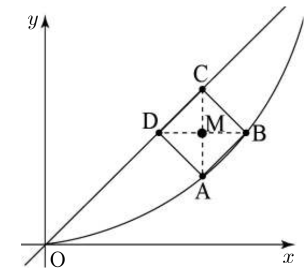
$\quad=(x-1)(2x^2+ax+4)$

최대공약수가 이차다항식이므로 최대공약수는 $(x-1)(x+2)$ 이다.

따라서 $x+2$는 $2x^2+ax+4$의 인수이므로

$a=6$ $\quad\therefore\ a^2=36$

30. [출제의도] 평면좌표를 이용하여 수학내적문제 해결하기



사각형 ABCD의 점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^2)$, 점 B의 좌표를 $(\beta,\ \beta^2)$라 놓으면 점 C의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha)$, 점 D의 좌표는 $(\beta^2,\ \beta^2)$이 된다. 직선 AB와 직선 CD의 기울기가 같으므로

$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=1\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=1$ ⋯ ㉠

이다. 이때, 사각형의 두 대각선 BD와 AC의 교점을 점 M이라 하면 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=2\overline{\mathrm{BM}}$ 이다. 즉,

$\beta-\beta^2=2(\beta-\alpha)$

$\beta^2+\beta-2\alpha=0$

㉠에 의하여 $\alpha=1-\beta$

$\beta^2+3\beta-2=0$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\ (\because \beta>0)$

따라서 대각선의 길이는

$\beta-\beta^2=\beta(1-\beta)$

$=\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\times\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)=2\sqrt{17}-8$

그러므로 $a=17,\ b=-8$

$\therefore\ a+b=9$